Corrigé Examen Géométrie Élémentaire (L2) mercredi 3 mai 2017
14h-16h

1. On considère un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{O}'$ le point dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ sont $(3, -1)$, et soient $\vec{u} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$; alors $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{u}, \vec{v})$ est un autre repère cartésien (on l'admet).

a. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ du point P dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(-2, 5)$.

$\surd$ *Ce point est* $\mathcal{O}' - 2\vec{u} + 5\vec{v}$ *soit* $\mathcal{O} + 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2(\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}) + 5(2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}) = \mathcal{O} + 11\vec{\imath} - 20\vec{\jmath}$ *donc ces coordonnées sont* $(11, -20)$.

b. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ du point Q dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont $(3, -4)$.

$\surd$ *In pourra exprimer d'abord* $\vec{\imath} = -5\vec{u} + 3\vec{v}$ *et* $\vec{\jmath} = -2\vec{u} + \vec{v}$, *et puis calculer* $\mathcal{O} + 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} = \mathcal{O}' + 0\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} = \mathcal{O}' + 6\vec{u} - 3\vec{v}$ *donc les coordonnées demandées sont* $(6, -3)$. *On pourra également trouver ce résultat par la résolution de l'équation* $\mathcal{O}' + x'\vec{u} + y'\vec{v} = \mathcal{O} + 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ *qui donne le système linéaire* $x' + 2y' = 0$, $-3x' - 5y' = -3$ *avec comme solution* $(x', y') = (6, -3)$.

2. On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; les coordonnées par rapport à ce repère sont notées x, y. Soit P le point de coordonnées $(2, 7)$, $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ le vecteur de coordonnées $(-2, 3)$, $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x + 5y = -4$, et $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'application affine avec $f(P) = P$ et dont $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ est la matrice par rapport à $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. Décrire en coordonnées les objets géométriques suivantes (les calculs nécessaires sont indépendants) :

a. Le point d'intersection de la droite $\{\, P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbf{R} \,\}$ avec $\mathcal{D}$.

$\surd$ *On résout* $P + \lambda\vec{v} \in \mathcal{D}$, *c'est-à-dire* $3(2 - 2\lambda) + 5(7 + 3\lambda) = -4$ *ou* $41 + 9\lambda = -4$ *ce qui donne comme solution* $\lambda = -5$ *et donc* $P + \lambda v = (2, 7) - 5(-2, 3) = (12, -8)$.

b. La droite qui est image de $\mathcal{D}$ par la translation par le vecteur $\vec{v}$ (c'est-à-dire $A \mapsto A + \vec{v}$).

$\surd$ *Les points de cette droite translatés par* $-\vec{v}$ *doivent être dans* $\mathcal{D}$, *donc on on obtient la droite de l'équation* $3(x + 2) + 5(y - 3) = -4$, *ou* $3x + 5y = 5$.

c. Le point $f(\mathcal{O})$ (image de l'origine $\mathcal{O}$ par f).

$\surd$ *On a* $f(\mathcal{O}) = f(P + \overrightarrow{P\mathcal{O}}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{P\mathcal{O}}) = P - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathcal{O}P})$ *car* $f(P) = P$. *Cela devient en coordonnées* $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -9 \\ -24 \end{smallmatrix}\right)$.

d. La droite $f(\mathcal{D})$ (image de $\mathcal{D}$ par f). [Il peut être utile d'écrire $\mathcal{D}$ sous forme paramétrée d'abord.]

$\surd$ *Suivant l'indication on écrit (par exemple)* $\mathcal{D} = \{\, A + \lambda\vec{w} \mid \lambda \in \mathbf{R} \,\}$ *où* $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, *alors de transformer cette description en* $f(D) = \{\, f(A) + \lambda\overrightarrow{f}(\vec{w}) \mid \lambda \in \mathbf{R} \,\}$. *Ensuite on calcule le point* $f(A) = f(\mathcal{O}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathcal{O}A}) = \left(\begin{smallmatrix} -9 \\ -24 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -7 \\ -20 \end{smallmatrix}\right)$, *(on aurait pu le calculer directement* $f(A) = f(P) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PA})$ *comme dans la question précédente) et* $\overrightarrow{f}(\vec{w}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 16 \end{smallmatrix}\right)$) *donc on obtient* $f(D) = \{\, \left(\begin{smallmatrix} -7 \\ -20 \end{smallmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 16 \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbf{R} \,\}$, *une droite aussi donnée par l'équation* $16x - 7y = 28$.

3. Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien, muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (donc $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormée).

a. Décrire par une équation cartésienne la droite passant par le point de coordonnées $(1, 7)$ et orthogonale au vecteur $3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.

$\surd$ *Les équations de droites orthogonales au vecteur* $3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ *sont de la forme* $3x - 2y = c$, *et pour que* $(x, y) = (1, 7)$ *soit solution de cette équation il faut* $3 \times 1 - 2 \times 7 = c$ *donc* $c = -11$. *Une équation cherchée est donc* $3x - 2y = -11$ *ou* $3x - 2y + 11 = 0$.

b. Décrire par une équation cartésienne le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[A, B]$, où $A, B \in \mathcal{P}$ sont les points dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ sont $(5, 3)$ respectivement $(1, -4)$.

$\surd$ *Deux méthodes de solution: (1) c'est le cercle de centre* $\mathrm{bar}(A, B) = (3, -\frac{1}{2})$ *et de rayon égale à la distance de ce centre vers* A *ou* B, *soit* $\sqrt{2^2 + (\frac{7}{2})^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$ *donc l'équation est* $(x-3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{65}{4}$ *ou* $x^2 - 6x + y^2 + y = 7$, *et (2) pour que* $P \in \mathcal{C}$ *il faut et suffit que* $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, *donc pour les coordonnées* (x, y) *de* P *on obtient* $\left(\begin{smallmatrix} x-5 \\ y-3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x-1 \\ y+4 \end{smallmatrix}\right) = 0$ *ce qui donne* $x^2 - 6x + y^2 + y = 7$

4. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A, B, C)$ (un triangle). On rappelle que les coordonnées barycentriques (x, y, z) d'un point $S \in \mathcal{P}$ sont des nombres réels, soumis à la contrainte $x + y + z = 1$, pour lesquels $S = \operatorname{bar}((x, A), (y, B), (z, C))$. On abrégera cette relation $S = (x, y, z)_\mathcal{R}$

a. Rappeler une formule donnée dans le cours qui exprime la condition que trois points $(x_1, y_1, z_1)_\mathcal{R}$, $(x_2, y_2, z_2)_\mathcal{R}$, et $(x_3, y_3, z_3)_\mathcal{R}$, sont alignés.

$\surd$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

b. On choisit des points P sur la droite (BC), Q sur la droite (CA), et R sur la droite (AB), en évitant chaque fois les points A, B, C eux-mêmes (donc $\{P, Q, R\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$). Montrer que $P = (0, \lambda, 1 - \lambda)_\mathcal{R}$, $Q : (1 - \mu, 0, \mu)_\mathcal{R}$ et $R : (\nu, 1 - \nu, 0)_\mathcal{R}$ pour certains $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

$\surd$ *Il s'agit essentiellement de montrer qu'un point est sur (BC) si et seulement si sa première coordonnée barycentrique (x) est nulle, car la contrainte $x+y+z = 1$ entraîne alors que ses coordonnées sont $(0, \lambda, 1-\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$, et les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$ correspondent aux points B respectivement C qui sont à éviter (pour les droites (CA) et (AB) les arguments sont similaires, mais pour la seconde respectivement troisième coordonnée). Divers arguments peuvent justifier l'équivalence cherchée: (1) une équation linéaire non triviale en coordonnées barycentriques définit une droite, et celle définie par $x = 0$ contient $B = (0, 1, 0)_\mathcal{R}$ et $C = (0, 0, 1)_\mathcal{R}$, donc c'est forcément (BC); (2) les points de $\big(BC)$ sont ceux de la forme $\operatorname{bar}((\lambda, B), (1-\lambda, C)) = \operatorname{bar}((0, A), (\lambda, B), (1-\lambda, C))$, donc de coordonnées barycentriques de la forme $(0, \lambda, 1 - \lambda)$; (3) $P = (x_1, y_1, z_1)_\mathcal{R}$ est aligné avec B et C si l'équation du point a est vérifiée pour $(x_2, y_2, z_2) = (0, 1, 0)$ et $(x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 1)$, et cette équation devient alors (après développement du déterminant) $x_1 = 0$.*

c. Montrer que la droite (AP) est égale à $\{\, (x, y, z)_\mathcal{R} \mid x + y + z = 1, (\lambda - 1)y + \lambda z = 0 \,\}$

$\surd$ *On applique l'équation du point a avec $(x_2, y_2, z_2) = (1, 0, 0)$ et $(x_3, y_3, z_3) = (0, \lambda, 1-\lambda)$); on trouve après développement l'équation $-y_1(1 - \lambda) + z_1\lambda = 0$, c'est (équivalent à) l'équation cherchée.*

On écrira dans la suite $[a, b, c]_\mathcal{R}$ pour une droite ainsi définie par une équation en coordonnées barycentriques $\{\, (x, y, z)_\mathcal{R} \mid x + y + z = 1, ax + by + cz = 0 \,\}$. Donc $(AP) = [0, \lambda - 1, \lambda]_\mathcal{R}$ d'après la question précédente. De façon similaire $(B, Q) = [\mu, 0, \mu - 1]_\mathcal{R}$ et $(C, R) = [\nu - 1, \nu, 0]_\mathcal{R}$ (on l'admet).

d. On considère la question si les droites (AP), (BQ) et CR sont concourantes, c'est-à-dire s'il existe ou non un point S du plan qui est situé sur les trois droites à la fois. En posant un système d'équations linéaire, déduire une condition en λ, μ, ν équivalente à celle disant que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

$\surd$ *La condition que le point $S = (x, y, z)_\mathcal{R}$ est situé sur la droite $[a, b, c]_\mathcal{R}$ veut dire que $ax+by+cz = 0$. Alors dire que S est situé à la fois sur (AP), (BQ) et CR veut dire que le système de trois équations linéaires homogènes de matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda - 1 & \lambda \\ \mu & 0 & \mu - 1 \\ \nu - 1 & \nu & 0 \end{pmatrix}$$

a les coordonnées (x, y, z) de S comme solution. En particulier ce système a une solution non triviale, d'où (le système n'est pas de Cramer, et) le déterminant de cette matrice est nulle. Cela donne l'équation $(\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1)+\lambda\mu\nu = 0$. (La question n'était pas tout à fait juste, car cette condition n'est par équivalente à l'existence d'un point S: dans des cas exceptionnels le système a des solutions mais aucune qui vérifie $x + y + z = 1$; dans ces cas les trois droites sont parallèles.)

e. Réorganiser (si besoin) votre condition en une équation de la forme $E_1(\lambda)E_2(\mu)E_3(\nu) = c$: le produit de trois expressions en respectivement λ, μ, et ν vaut une constate c (à détailler quelles expressions et quelle constante). Ce résultat est connu comme le théorème de Ceva.

$\surd$ *On peut écrire $\lambda\mu\nu = -(\lambda - 1)(\mu - 1)(\nu - 1)$ en ensuite $\frac{\lambda}{1-\lambda} \times \frac{\mu}{1-\mu} \times \frac{\nu}{1-\nu} = 1$.*

5. Dans cet exercice on fera référence à la classification des isométries du plan euclidien $\mathcal{P}$: identité, réflections, rotations, translations, et réflections glissées.

a. De quelle nature peut être la composée de deux réflexions dans des droites distinctes ?

$\surd$ *C'est soit une translation (si les droites dont parallèles) , soit une rotation (si les droites sont sécantes).*

b. Montrer que la composée de trois réflexions par rapport à trois droites concourantes $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ est une réflexion.

$\surd$ *Comme c'est une composée d'un nombre impair de réflexions, c'est une isométrie indirecte: soit une réflexion, soit une réflection glissée. Le point d'intersection C des trois droite concourantes étant fixe par la composée des trois réflexions, celle-ci n'est pas une réflection glissée (qui n'a pas de points fixe) mais une réflexion (par une droite qui passe par ce point.*

c. Décrire l'axe de cette réflexion composée, en terme des axes $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ des réflexions initiales.

$\surd$ *Soit α l'angle de rotation de centre C qui transforme D_1 en $\mathcal{D}_2$, alors la composée des deux premières réflexions est une rotation de centre C et d'angle 2α. On peut donc remplacer (D_1, D_2) par toute autre paire de deux autres droites (D'_1, D'_2) toujours passant par C et avec un angle orienté α entre les deux. En particulier on peut choisir $\mathcal{D}'_2 = D_3$, avec $\mathcal{D}'_1$ la droite obtenue par rotation de $\mathcal{D}_3$ autour de C par un angle $-\alpha$. La composée des réflexions par rapport à $\mathcal{D}'_1$, $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_3$ est alors égale à la réflexion par rapport à $\mathcal{D}'_1$ (car les deux dernières réflexions identiques ont pour composée l'identité). Mais cette composée est égale à la composée des réflexions par rapport à $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$, qui est donc une réflexion avec axe $\mathcal{D}'_1$ qu'on vient de décrire.*