Examen Espaces euclidiens et hermitiens mardi 11 mai 2021
8h30–11h30

L'utilisation de documents ou de tout appareil électronique est interdite. Dans vos réponses aux questions autres que les questions de cours, vous pouvez citer et utiliser sans démonstration tout résultat du cours ou des TD. Les 5 parties sont indépendantes.

1. *Questions de cours.*

a. Donner une description explicite du groupe $\mathbf{O}(2)$ des matrices 2×2 orthogonaux, et indiquer parmi ces matrices lesquelles forment le groupe $\mathbf{SO}(2)$.

b. Pour une forme quadratique réelle Q avec forme polaire φ, donner les définitions des vecteurs φ-orthogonaux, des vecteurs isotropes, et du noyau de la forme.

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$$

a. Argumenter sans calcul qu'il existe dans $\mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ une matrice *diagonale* D et une matrice *orthogonale* P telles que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

b. Calculer et factoriser (dans $\mathbf{R}[X]$) le polynôme caractéristique χ_A de A. (On utilisera la définition $\det(XI - A)$ du polynôme caractéristique, qui est donc toujours unitaire.)

c. Déterminer des matrices D, P telles que décrites dans la question *a.*

3. On considère dans $\mathbf{R}^3$, muni de sa structure habituelle l'espace euclidien et orienté de telle façon que la base canonique est directe, l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que f est une rotation.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de f (axe, et angle orienté par rapport à une orientation qu'on spécifiera).

4. Sur l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^4$ on définit la forme quadratique $Q : E \to \mathbf{R}$ en coordonnées par rapport à la base canonique par

$$Q((x, y, z, t)) = -x^2 + 2xz - 4xt + yz - 2yt - z^2 + 3zt - 4t^2$$

pour tout $x, y, z, t \in \mathbf{R}$.

a. Donner la matrice de la forme polaire φ de Q dans la base canonique.

b. En utilisant le procédé de Gauss, écrire $Q((x, y, z, t)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i(x, y, z, t)^2$, pour $k \leq 4$ et des scalaires non nuls $\lambda_i \in \mathbf{R}$ et des formes linéaires $\alpha_1(x, y, z, t), \ldots, \alpha_k(x, y, z, t)$ (des combinaisons linéaires des coordonnées x, y, z, t) qui sont linéairement indépendantes.

c. En déduire la signature de la forme quadratique Q, et son rang.

5. Soit E un espace euclidien, V un sous-espace vectoriel de E, $w \in E$ un vecteur que n'appartient pas à V, et $v \in V$ sa projection orthogonale sur V (on a donc $w - v \perp V$). Montrer que $\|w - v\| \leq \|w - v'\|$ pour tout $v' \in V$.

Fin.