Corrigé Contrôle continu Espaces euclidiens et hermitiens (L2PR) jeudi 20 février 2020
8h15–10h15

1. *Questions de cours.* E désigne un espace euclidien.

a. Donner la définition, pour une partie $A \subseteq E$, du complément orthogonal $A^\perp$. S'agit-il toujours d'une sous-espace de E (juste oui ou non ; pas d'argumentation demandée ici) ?

$\surd$ *On a $A^\perp = \{ v \in E \mid \forall a \in A : a \perp v \}$ (ce qu'on peut écrire aussi comme $A^\perp = \bigcap_{a\in A} a^\perp$ où $a^\perp = \{ v \in E \mid a \perp v \}$). Il s'agit toujours d'un sous-espace vectoriel (et euclidien) de E.*

b. Si pour un endomorphisme (vectoriel) ϕ de E, il existe une base *orthonormée* de E formée de vecteurs propres pour ϕ, alors quel type d'endomorphisme ϕ est-il ?

$\surd$ *Un tel endomorphisme est un endomorphisme symétrique.*

c. Donner l'énoncé et une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$\surd$ *Énoncé. Pour $v, w \in E$ on a $|(v \mid w)| \leq \|v\| \|w\|$, et le cas d'égalité $|(v \mid w)| = \|v\| \|w\|$ se produit (si et) seulement si $[v, w]$ est une famille liée. Démonstration. D'abord on considère le cas spécial $v = 0$: dans ce cas on a toujours égalité $0 = |(v \mid w)| = \|v\| \|w\| = 0$ et $[v, w]$ est toujours une famille liée, donc l'énoncé est vérifié pour ce cas. Dans la suite on supposera donc $v \neq 0$. La fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $\lambda \mapsto \|\lambda v + w\|^2$ est à valeurs positives, or $\|\lambda v + w\|^2 = (\lambda v + w \mid \lambda v + w) = \|v\|^2 \lambda^2 + 2 (v \mid w) \lambda + \|w\|^2$ est une expression quadratique en λ (c'est-à-dire, polynomiale de degré 2 ; ici on a utilisé que $v \neq 0$ et donc $\|v\|^2 \neq 0$, d'où le terme en λ^2 n'est pas nul), et le fait qu'elle ne change nulle part de signe quand λ parcourt $\mathbf{R}$ implique que son discriminant $\Delta = 4 (v \mid w)^2 - 4 \|v\|^2 \|w\|^2$ vérifie $\Delta \leq 0$, c'est-à-dire $4 (v \mid w)^2 - 4 \|v\|^2 \|w\|^2 \leq 0$, ce qui entraîne $(v \mid w)^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$, et comme les deux membres sont des nombres réels positifs, on peut prendre leur racine carrée en obtenir $(v \mid w) \leq \|v\| \|w\|$. Finalement, le cas d'égalité correspond à $\Delta = 0$, ce qui veut dire que l'expression $\|\lambda v + w\|^2$ s'annule pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$, donc $\lambda v + w = 0$ pour ce λ (car le produit scalaire est défini positif), et $[v, w]$ est une famille liée.*

2. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<7}$ le $\mathbf{R}$-espace des polynômes de degré inférieur à 7. Sur E on définit la forme bilinéaire (on admet que c'en est une) φ par

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{7} \sum_{i=-3}^{3} P[i]Q[i]$$

où $P[a]$ pour $a \in \mathbf{R}$ désigne le résultat de substituer $X = a$ dans P (l'évaluation de P en a).

a. Montrer que la forme bilinéaire φ est un produit scalaire sur E.

$\surd$ *D'abord φ est une forme (bilinéaire) symétrique, car*

$$\varphi(Q, P) = \frac{1}{7} \sum_{i=-3}^{3} Q[i]P[i] = \frac{1}{7} \sum_{i=-3}^{3} P[i]Q[i] = \varphi(P, Q)$$

pour tout $P, Q \in E$. Elle est positive car $\varphi(P, P) = \frac{1}{7} \sum_{i=-3}^{3} P[i]^2 \geq 0$ pour tout $P \in E$. Finalement pour voir que φ est une forme définie, si $\varphi(P, P) = 0$ on en déduit de cette formule que $P[i]^2 = 0$ pour $i = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, c'est à dire chacune de ces 7 valeurs est une racine de P ; puisque $\deg(P) < 7$ ce n'est possible que si $P = 0$: la forme φ est définie.

b. On restreint ce produit scalaire φ au sous-espace $V = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ de E. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi|_V)$ de cette restriction $\varphi|_V$ par rapport à la base $\mathcal{B} = [1, X, X^2]$ de V.

$\surd$ *par définition* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi|_V) = (\varphi(X^i, X^j))_{i,j\in\{0,1,2\}}$, *et* $\varphi(X^i, X^j) = \sum_{k=-3,3} k^{i+j}$. *Cette somme pour* $i+j = 0, 1, 2, 3, 4$ *vaut respectivement* $\frac{7}{7} = 1$, $\frac{1}{7}(-3, -2, -1+0+1+2+3) = 0$, $\frac{1}{7}(9+4+1+0+1+4+9) = 4$, $\frac{1}{7}(-27, -8, -1+0+1+8+27) = 0$, *et* $\frac{1}{7}(81+16+1+0+1+16+81) = 28$, *donc*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi|_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 28 \end{pmatrix}$$

c. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ pour trouver une base orthonormée de V.

$\surd$ *On commence par orthogonaliser la famille* $[v_0, v_1, v_2] = [1, X, X^2]$. *Déjà* v_1 *est orthogonal à* v_0, *donc il n'est pas nécessaire de le modifier. Pour projeter* v_2 *sur le complément orthogonal de* $\mathrm{Vect}(v_0, v_1)$, *on le remplace par* $v_2' = v_2 - \frac{(v_0|v_2)}{(v_0|v_0)}v_0 - \frac{(v_1|v_2)}{(v_1|v_1)}v_1 = v_2 - 4v_0$ *Puis on normalise la famille* $[v_0', v_1', v_2'] = [1, X, X^2 - 4]$ *; après calcul de* $\left\|v_0'\right\|^2 = 1$, $\left\|v_1'\right\|^2 = 4$ *et* $\left\|v_2'\right\|^2 = 12$ *on form la famille orthonormée* $[u_0, u_1, u_2] = [1, \frac{1}{2}X, \frac{1}{2\sqrt{3}}(X^2 - 4)]$.

d. Montrer que pour $S = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^4, X^6)$ et $T = \mathrm{Vect}(X, X^3, X^5)$ on a $S \perp T$.

$\surd$ *On voit facilement que si* $i+j$ *est impair* $\sum_{k=-3}^{3} k^{i+j} = 0$, *et donc* $\varphi(X^i, X^j) = 0$. *Ainsi chacun des générateurs de* S *est orthogonal à chacun des générateurs de* T, *et par linéarité il en découle* $S \perp T$ *(si on veut un argument plus formel : puisque* $A^\perp$ *est une sous-espace vectoriel pour tout partie* A *on peut pour un autre partie* B *raisonner* $A \perp B \Rightarrow B \subseteq A^\perp \Rightarrow \mathrm{Vect}(B) \subseteq A^\perp \Rightarrow A \perp \mathrm{Vect}(B)$, *et donc* $\{1, X^2, X^4, X^6\} \perp \{X, X^3, X^5\} \Rightarrow \{1, X^2, X^4, X^6\} \perp \mathrm{Vect}(X, X^3, X^5) \Rightarrow \mathrm{Vect}(1, X^2, X^4, X^6) \perp \mathrm{Vect}(X, X^3, X^5)$*).*

e. Montrer que $E = S \oplus T$ et en déduire $T = S^\perp$.

$\surd$ *On a* $S \cap T = \{0\}$ *(car tout vecteur de cette intersection est orthogonal à soi-même d'après* $S \perp T$, *et donc nul), donc la somme* $S + T$ *est directe. Sa dimension donc est* $\dim(S) + \dim(T) = 4 + 3 = 7 = \dim(E)$, *et puisque* $S, T \subseteq E$, *cette somme ne peut qu'être égale à* E. *Comme* $S^\perp$ *est une sous-espace de dimension* $7 - \dim(S) = 4$ *qui contient* T, *qui est aussi de dimension* 4, *on conclut* $T = S^\perp$.

3. Soit $E = \mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, dans lequel on considère le sous-espace vectoriel (on admet que c'en est un) $V = \{\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\,\}$.

a. Donner $\dim(V)$, et trouver une base orthonormée de V.

$\surd$ *Puisque* $f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ *est une application linéaire non nulle* $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ *et donc de rang 1, on a* $\dim(V) = \dim(\ker(f)) = 4 - 1 = 3$ *d'après le théorème du rang. On choisit d'abord une famille orthogonal de 3 vecteurs dans* V, *qu'on peut ensuite normaliser. Par exemple* $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, -2, 0)$ *et* $v_3 = (1, 1, 1, -3)$. *Après division par leurs normes respectives* $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, *et* $2\sqrt{3}$, *on obtient la base orthonormée* $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2, 0), \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1, -3)]$. *Beaucoup d'autres réponses correctes sont possibles.*

b. Donner $\dim(V^\perp)$, et trouver une base orthonormée de $V^\perp$.

$\surd$ $\dim(V^\perp) = 4 - \dim(V) = 4 - 3 = 1$. *Un vecteur non nul de* $V^\perp$ *est clairement* $(1, 1, 1, 1)$ *(dont les coefficients sont ceux de la forme linéaire dont* V *est le noyau), et après normalisation on obtient la base orthonormée* $[\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)]$.

c. Donner la matrice de la projection orthogonale (c'est-à-dire parallèlement à $V^\perp$) sur V [Indication : il peut être utile de considérer d'abord la projection orthogonale sur $V^\perp$.]

$\surd$ *La projection orthogonale sur $V^\perp$ est donnée par $v \mapsto \frac{((1,1,1,1)|v)}{4}(1,1,1,1)$, et la projection orthogonale sur V en est déduit par soustraction de cette projection de l'identité, donnant $v \mapsto v - \frac{((1,1,1,1)|v)}{4}(1,1,1,1)$. Sa matrice (par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$) est*

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Soient $w_1, \ldots, w_k$ des vecteurs non nuls dans un espace euclidien E.

a. Montrer que $(w_i^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(w_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$.

$\surd$ *On a (pour chaque i) $w_i^\perp = \ker(v \mapsto (w_i \mid v))$ et donc $\dim(w_i^\perp) = \dim(E) - 1$ d'après le théorème du rang (comme dans la question **3**a), et $\dim((w_i^\perp)^\perp) = \dim(E) - \dim(w_i^\perp) = 1$. Or w_i est un vecteur non nul dans $(w_i^\perp)^\perp$, et en est donc un générateur : $(w_i^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(w_i)$.*

b. Soit $V = w_1^\perp \cap \cdots \cap w_k^\perp$. Montrer que $V^\perp = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_k)$.
[Indication : on pourra utiliser les formules pour le complément orthogonal vues en TD.]

$\surd$ *$V^\perp = (w_1^\perp \cap \cdots \cap w_k^\perp)^\perp = (w_1^\perp)^\perp + \cdots + (w_k^\perp)^\perp$ (on a itéré la relation $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$ vue en TD) ce qui est d'après la question a : $\mathrm{Vect}(w_1) + \cdots + \mathrm{Vect}(w_k) = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_k)$.*

Fin.