Contrôle continu Espaces euclidiens et hermitiens (L2PR) vendredi 15 mars 2019
8h15–10h15

L'utilisation de documents ou de tout appareil électronique est interdite. Dans vos réponses aux questions autres que la question de cours, vous pouvez citer et utiliser sans démonstration tout résultat du cours ou des TD. Les 4 parties sont indépendantes.

1. *Question de cours.* Montrer que si $\mathcal{F} = [f_1, \ldots, f_k]$ est une famille orthonormée dans un espace euclidien E, on a $E = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) \oplus \mathcal{F}^\perp$. Si vous citez un résultat du cours, donner également une démonstration de ce résultat (ou du moins de la partie dont vous avez besoin) ; les résultats généraux d'algèbre linéaire peuvent être cités et utilisés sans démonstration.

2. Dans $E = \mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, posons $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, où $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 2, 1, 0)$, et $v_3 = (0, 0, 3, 1)$.

a. Montrer que $[v_1, v_2, v_3]$ est une base du sous-espace F.

b. Trouver une base orthonormée $[b_1, b_2, b_3]$ de F telle qu'on ait en plus $\mathrm{Vect}(b_1) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $\mathrm{Vect}(b_1, b_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

c. Déterminer la projection orthogonale de $(1, 0, 0, 0)$ sur $F^\perp$.

3. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<4}$ le $\mathbf{R}$-espace des polynômes de degré inférieur à 4. Sur E on définit la forme bilinéaire φ par

$$\varphi(P, Q) = P[0]Q[0] + \int_0^1 P'[t]Q'[t]\mathrm{d}t$$

où $P[a]$ pour $a \in \mathbf{R}$ désigne le résultat de substituer $X = a$ dans P, et P' désigne le polynôme dérivé par rapport à X de P.

a. En admettant que φ est une forme bilinéaire, montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

b. Déterminer la matrice de φ par rapport à la base canonique $[1, X, X^2, X^3]$ de E.

c. Trouver la valeur minimale de la norme (pour ce produit scalaire) d'un polynôme de E dont le coefficient de X^3 est 1 (c'est-à-dire d'un polynôme unitaire de degré 3, mais cela sans rapport avec la notion de "unitaire" pour un vecteur d'un espace euclidien).

4. Dans un espace euclidien E de dimension n, soit $\mathcal{F} = [v_1, \ldots, v_k]$ une famille de vecteurs non nuls. Pour $1 \leq i \leq k$ on pose $H_i = v_i^\perp$.

a. Montrer que chaque H_i est une hyperplan vectoriel de E (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$).

b. Montrer que $\bigcap_{i=1}^k H_i$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - \mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_k)$, où $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_k)$ est le rang de la famille $\mathcal{F}$ (dimension du sous-espace qu'elle engendre).

Fin.