Corrigé Contr. cont. 4 (combinatoire) Combinatoire et Géométrie (L2) jeudi 9 janvier 2020
14h-16h

1. Pour chaque point ci-dessous répondre par A, B, C, ou D. Une motivation n'est pas demandée ; une bonne réponse contient une et une seule de ces lettres.

Pour les points a à e cette lettre signifie que, pour les ensembles X, Y mentionnés
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucune de ces trois possibilités s'applique, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$».

a. $X = \{\, n \in \mathbf{Z} \mid n^2 < 10 \,\}$, et $Y = \{3, 2, 1, 0, 1, 2, 3\}$.
1 $\surd$ *C: clairement $n^2 < 10$ pour tout $n \in Y = \{0, 1, 2, 3\}$ donc $X \supseteq Y$, mais par exemple $-3 \in X \setminus Y$.*

b. $X = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$, et $Y = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$.
1 $\surd$ *C: L'ensemble Y n'a que 7 éléments, tous membres de $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ mais qui a $2^3 = 8$ éléments ; la partie $\{0, 2\}$ manque dans Y donc $X \supset Y$.*

c. $X = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0 \,\}$, et $Y = \{\, (a, b - a, -b) \mid a, b \in \mathbf{R} \,\}$.
1 $\surd$ *A. Ce sont deux descriptions du même plan.*

d. $X = \{\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}\}$ et $Y = \{\{0, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}\}$.
1 $\surd$ *D. Deux partitions différentes du même ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mais visiblement aucune inclusion entre les deux.*

e. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y \,\} \cap \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leq x \,\}$, et $Y = \{\, (t, t) \mid t \in \mathbf{R} \,\}$.
1 $\surd$ *A. Puisque $x \leq y \wedge y \leq x \iff x = y$, ces deux ensembles sont identiques.*

Pour les points f et g, on décrit chaque fois une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{N}^2$; indiquer si cette relation est
A : symétrique et transitive,
B : symétrique mais pas transitive,
C : anti-symetrique et transitive,
D : aucune de ces trois possibilités s'applique

[Indication : Il peut être utile de trouver une reformulation équivalente de la relation donnée.]

f. $(i, j)\mathcal{R}(k, l)$ si au moins un chemin de réseau existe qui commence en (i, j) et se termine en (k, l).
1 $\surd$ *C: On a $(i, j)\mathcal{R}(k, l) \iff i \leq k \wedge j \leq k$, et on vérifie facilement que cette relation est anti-symetrique et transitive.*

g. $(i, j)\mathcal{R}(k, l)$ si $i + l = j + k$.
1 $\surd$ *A: On a $(i, j)\mathcal{R}(k, l) \iff i - j = k - l$, et il est clair que cette relation est symétrique et transitive.*

2. Dans chacun des descriptions suivantes, donner le nombre de valeurs/objets du type spécifié.

a. Monômes en $x_1, x_2, \ldots, x_7$ de degré 9.
1 $\surd$ *En nommant les exposants $c_1, \ldots, c_7$ le nombre est $\#\{\, (c_1, \ldots, c_7) \in \mathbf{N}^7 \mid c_1 + \cdots + c_7 = 9 \,\} = \binom{7-1+9}{9} = \binom{15}{9} = 5005$. (interprétation G avec $m = 7, n = 9$)*

b. Des parties de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{P}(\{0, 1, \ldots, 9\})$).
1 $\surd$ *Pour $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ le nombre est $\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X} = 2^{10} = 1024$. (J avec $n = 10$)*

c. $\{\, f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{1, 3, 5, 7\} \mid i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j) \,\}$ (des applications croissantes).
1 $\surd$ *Le nombre est $\binom{4-1+8}{8} = \binom{11}{8} = 165$ (H avec $l = 8, m = 4$)*

d. Évolutions de score dans un match de foot menant au score final 6–5.
1 $\surd$ *Le nombre est $\binom{6+5}{5} = \binom{11}{5} = 462$. (A avec $k = 6, l = 5$)*

e. Commandes d'un groupe de 6 personnes, choisissant chacune une entrée dans un menu qui compte 12 options (seul le nombre de fois chaque option est choisie fait partie de la commande).
1 $\surd$ *Le nombre est $\binom{12-1+6}{6} = \binom{17}{6} = 12376$. (F avec $l = 6, m = 12$)*

f. Mots formés en utilisant (seulement) 5 lettres "X" et 9 lettres "Y".
1 $\surd$ *Le nombre est $\binom{5+9}{9} = \binom{14}{9} = 2002$. (B avec $k = 5, l = 9$)*

g. Chemins de réseau de $(0,0)$ vers $(6,11)$.

1 $\surd$ *Le nombre est* $\binom{6+11}{11} = \binom{17}{11} = 12376$. *(A avec* $k = 6, l = 5$*)*

h. Chemins de réseau de $(0,0)$ vers $(6,11)$ qui passent par le point intermédiaire $(4,7)$.

1 $\surd$ *Un tel chemin est composé d'un chemin de* $(0,0)$ *vers* $(4,7)$ *suivi d'une chemin de* $(4,7)$ *vers* $(6,11)$, *qui peuvent être indépendamment choisis, d'où le nombre est le produit des nombres pour les deux parties, soit* $\binom{4+7}{7}\binom{(6-4)+(11-7)}{11-7} = \binom{11}{7}\binom{6}{4} = 330 \times 15 = 4950$.

3. Dans $E = \{0,1,\ldots,9\}^4$ on définit les quatre parties suivantes : $A = \{\,(k,l,m,n) \in E \mid k = l\,\}$, $B = \{\,(k,l,m,n) \in E \mid l = m\,\}$, $C = \{\,(k,l,m,n) \in E \mid m = n\,\}$, et $D = \{\,(k,l,m,n) \in E \mid n = k\,\}$. Les faits suivants sont faciles à montrer, et on les admet. Le cardinal de E est 10 000, chacune des parties A, B, C, D est de cardinal 1000, chaque intersection de deux de ces parties comme $A \cap B$ ou $B \cap D$ est de cardinal 100, et chaque intersection de trois de ces parties, comme $A \cap B \cap D$, est de cardinal 10 ; finalement $A \cap B \cap C \cap D$ est également de cardinal 10.

a. Trouver le cardinal de la réunion $A \cup B \cup C \cup D$.

1 $\surd$ *En tenant compte des nombres* $\binom{4}{k}$ *de façons de former une intersection de* k *des* 4 *parties, pour* $k = 1,2,3,4$, *soit respectivement* $4,6,4,1$, *la formule d'inclusion-exclusion donne* $\#(A\cup B\cup C\cup D) = 4 * 1000 - 6 * 100 + 4 * 10 - 1 * 10 = 3430$.

b. En déduire le cardinal de $F = \{\,(k,l,m,n) \in E \mid k \neq l;\ l \neq m;\ m \neq n;\ n \neq k\,\}$.

1 $\surd$ *C'est le cardinal du complémentaire de* $A\cup B\cup C\cup D$ *dans* E, *donc* $\#F = \#E - \#(A\cup B\cup C\cup D) = 10000 - 3430 = 6570$.

4. Pour des nombres naturels $d \geq 1$ et n donnés, on cherche à compter les points $(a_1,\ldots,a_d) \in \mathbf{N}^d$ vérifiant l'inégalité $a_1 + \cdots + a_d \leq n$. On appellera $N_{d,n}$ le nombre de tels points.

a. Donner la formule pour le nombre de tels points vérifiant l'*égalité* $a_1 + \cdots + a_d = n$, et en l'utilisant exprimer $N_{n,d}$ comme une somme de $n+1$ coefficients binomiaux.

1 $\surd$ *Le nombre de solutions de* $a_1 + \cdots + a_d = n$ *est* $\binom{d-1+n}{n}$ *donc* $N_{n,d} = \sum_{k=0}^{n}\binom{d-1+k}{k}$.

b. Exprimer la valeur de cette somme, donc $N_{d,n}$, comme un seul coefficient binomial. [Indication: une identité vue en cours s'applique.]

1 $\surd$ *On a* $N_{n,d} = \sum_{k=0}^{n}\binom{d-1+k}{k} = \binom{d+n}{n}$ *en utilisant l'identité* $\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n}$. *On pourrait aussi utiliser la symétrie* $\binom{d-1+k}{k} = \binom{d-1+k}{d-1}$ *et l'identité* $\sum_{i=0}^{n}\binom{l+i}{l} = \binom{l+n+1}{l+1}$ *pour arriver à* $N_{n,d} = \sum_{k=0}^{n}\binom{d-1+k}{d-1} = \binom{d+n}{d}$, *ce qui revient au même.*

c. Démontrer par récurrence sur n la validité de cette évaluation de la somme.

1 $\surd$ *On peut montrer l'identité* $\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n}$ *par récurrence sur* n *; pour* $n = 0$ *elle dit* $\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0}$ *ce qui est vrai car les deux membres sont* 1. *Pour le car d'hérédité, soit* $n > 0$, *alors* $\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{m+i}{i} + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{n-1} + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}$ *(en utilisant l'hypothèse de récurrence pour le première égalité, et la relation de récurrence de Pascal pour la seconde). Si on avait choisi d'utiliser l'autre identité* $\sum_{i=0}^{n}\binom{l+i}{l} = \binom{l+n+1}{l+1}$, *sa démonstration est similaire.*

d. [bonus] Donner un argument direct (sans récurrence) qui montre que $N_{d,n}$ est égal à ce coefficient binomial, en considérant la possibilité de rajouter au d-uplet $(a_1,\ldots,a_d)$ un entier supplémentaire a_{d+1}, de telle façon qu'on ait égalité $a_1 + \cdots + a_d + a_{d+1} = n$.

1 $\surd$ *Tant que* $(a_1,\ldots,a_d)$ *vérifie* $a_1 + \cdots + a_d \leq n$, *un tel* a_{d+1} *existe, est unique, et vérifie* $a_{d+1} \in \mathbf{N}$. *Le nombre de façons de choisir* $(a_1,\ldots,a_d)$ *vérifiant* $a_1 + \cdots + a_d \leq n$ *est donc égal au nombre de façons de choisir* $(a_1,\ldots,a_{d+1})$ *vérifiant* $a_1 + \cdots + a_{d+1} = n$, *et ce dernier nombre est* $\binom{d+n}{n}$.