**Corrigé CC 2 (combinatoire) Combinatoire et Géométrie (L2)** mardi 5 novembre 2019
9h00-10h00

**1.** Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles $X, Y$. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$».

On remarque que ces possibilités sont mutuellement exclusives, donc toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est forcément fausse. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

*a.* $X = \{\{0,6\},\{2,8\},\{4,10\}\}$, et $Y = \{\{0,4,8\},\{2,6,10\}\}$.

$\surd$ *D. Aucune inclusion, l'ensemble $\{0,6\}$ est élément de $X$ mais pas de $Y$, et l'ensemble $\{0,4,8\}$ est élément de $Y$ mais pas de $X$.*

*b.* $X = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$ et $Y = \{\,(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbf{R}\,\}$.

$\surd$ *A. Ce sont deux expressions pour le cercle unité dans $\mathbf{R}^2$.*

*c.* $X = \{\,3m \mid m \in \mathbf{Z}\,\}$, et $Y = \{\,2n \mid n \in X\,\}$ [à noter: la définition de $Y$ utilise l'ensemble $X$].

$\surd$ *C. On a $X = 3\mathbf{Z} \supseteq Y = 6\mathbf{Z}$.*

*d.* $X = \{\,\{\,x \in I \mid x \leq a\,\} \mid a \in I\,\}$, et $Y = \{\,A \in \mathcal{P}(I) \mid \forall x \in I : \forall y \in A : (x < y \to x \in A)\,\}$, où $I$ désigne l'intervalle $\{1,2,3\}$ de $\mathbf{N}$.

$\surd$ *B. Car $X = \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ et $Y = \{\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ (n'oubliez pas l'ensemble vide!).*

*e.* $X = [0,\pi] = \{\,x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\,\}$, et $Y = \{\,x \in \mathbf{R} \mid \sin x \geq 0\,\}$.

$\surd$ *B. Car $\forall x \in [0,\pi] : \sin x \geq 0$ montre $X \subseteq Y$ mais pare exemple $2\pi \in Y$ pendant que $2\pi \notin X$.*

*f.* $X = \mathbf{R}_{\geq 0} = \{\,x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\,\}$ et $Y = \mathrm{Im}(f)$, l'image de l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

$\surd$ *C. Par ce qu'on sait sur les fonctions quadratiques $\min_{x\in\mathbf{R}} f(x) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ d'où $\mathbf{R}_{\geq 0} \supset \mathrm{Im}(f)$.*

**2.** Chacune des relations suivantes (définie sur l'ensemble $X$ indiqué) est réflexive et transitive (on l'admet). Indiquer s'il s'agit d'une relation d'équivalence, s'il s'agit d'une relation d'ordre partiel et s'il s'agit d'une relation d'ordre total (plus d'une des trois options peut s'appliquer, ou aucune).

*a.* Sur $X = \{\,A \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}) \mid \#A \in \mathbf{N}\,\}$ (l'ensemble des parties finies de $\mathbf{Z}$), la relation d'inclusion "$\subseteq$".

$\surd$ *C'est une relation anti-symétrique (car $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$) et donc une d'ordre partiel.*

*b.* Sur $X = \{\,\mathbf{N}_{<n} \mid n \in \mathbf{N}\,\}$ où $\mathbf{N}_{<n} = \{\,x \in \mathbf{N} \mid x < n\,\}$ (l'ensemble des parties initiales finies de $\mathbf{N}$), la relation d'inclusion "$\subseteq$".

$\surd$ *C'est un relation anti-symétrique (pour la même raison que dans la question précédente) et donc une d'ordre partiel. C'est aussi un ordre total, car $\mathbf{N}_{<n} \subseteq \mathbf{N}_{<m} \iff n \leq m$, et pour $n, m \in \mathbf{N}$ on a toujours $n \leq m \vee m \leq n$.*

*c.* Sur $X = \mathbf{C}$ la relation $x \mathrel{\mathcal{R}} y \iff |x| \leq |y|$.

$\surd$ *Cette relation n'est ni symétrique (clairement) ni anti-symétrique (car par exemple $1 \mathrel{\mathcal{R}} -1$ et $-1 \mathrel{\mathcal{R}} 1$), donc aucune des options s'applique.*

*d.* Sur $X = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\})$ (l'ensemble parties de $\mathbf{N}_{<10}$), la relation d'équipotence: $A \mathrel{\mathcal{R}} B \iff \#A = \#B$.

$\surd$ *C'est une relation clairement symétrique, donc une relation d'équivalence.*

**3.** On considère sur l'ensemble $X = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0 \}$ la relation $\sim$ d'être un multiple scalaire: $(x,y) \sim (x',y') \iff \exists \lambda \in \mathbf{R}_{\neq 0} : (x,y) = (\lambda x', \lambda y')$.

*a.* Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $X$.

$\surd$ *Réflexivité: pour tout $(x,y) \in X$ on a $(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ avec $\lambda = 1$. Symétrie: si $(x,y) \sim (x',y')$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}_{\neq 0}$ tel que $(x,y) = (\lambda x', \lambda y')$, et alors pour $\mu = \lambda^{-1} \in \mathbf{R}_{\neq 0}$ on a $(x',y') = (\mu x, \mu y)$, ce qui prouve que $(x',y') \sim (x,y)$. Transitivité: si $(x,y) \sim (x',y')$ et $(x',y') \sim (x'',y'')$ alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_{\neq 0}$ tels que $(x,y) = (\lambda x', \lambda y')$ et $(x',y') = (\mu x'', \mu y'')$ ; alors $(x,y) = (\lambda\mu x'', \lambda\mu y'') = (\nu x'', \nu y'')$ où $\nu = \lambda\mu \in \mathbf{R}_{\neq 0}$, et et donc $(x,y) \sim (x'',y'')$.*

*b.* Soit $Q = X/{\sim}$ l'ensemble quotient pour cette relation d'équivalence, et pour chaque $(x,y) \in X$ soit $C((x,y)) \in Q$ la classe d'équivalence à laquelle appartient $(x,y)$. Montrer qu'on peu définir une application $f : Q \to \mathbf{R}$ par $f : C((x,y)) \mapsto \frac{y}{x}$ pour tout $(x,y) \in X$.

$\surd$ *Puisque tous les éléments de $Q$ sont de la forme $C((x,y))$ pour certains $(x,y) \in X$, la règle $f(C((x,y)) = \frac{y}{x}$ détermine la valeur de $f$ en tout élément de $Q$ au moins une fois. Ce qui reste à montrer est que en cas de multiples spécifications de la valeur de $f$ en une même classe dans $Q$, ces spécifications concordent sur cette valeur. Soit donc $(x,y), (x',y') \in X$ tels que $C((x,y)) = C((x',y'))$, autrement dit tels que $(x,y) \sim (x'y')$. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}_{\neq 0}$ tel que $(x,y) = (\lambda x', \lambda y')$. Les deux spécifications de $f(C((x,y)) = f(C((x',y'))$ sont $\frac{y}{x}$ pour la première, et $\frac{y'}{x'} = \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x}$ pour la seconde. On voit que les deux concordent.*

*c.* [bonus] Montrer que $f$ est une bijection $Q \to \mathbf{R}$.

$\surd$ *Surjectivité: Si $a \in \mathbf{R}$, on a $f(C(1,a)) = \frac{a}{1} = a$. Injectivité soient $(x,y), (x',y') \in X$ tels que $f(C((x,y)) = f(C((x',y'))$ ; on veut montrer que $C((x,y)) = C((x',y'))$. Or par hypothèse $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$ et donc $yx' = xy'$. En prenant $\lambda = \frac{x}{x'} \in \mathbf{R}_{\neq 0}$ on a $\lambda x' = \frac{x}{x'}x' = x$ et $\lambda y' = \frac{x}{x'}y' = \frac{xy'}{x'} = \frac{yx'}{x'} = y$, donc $(x,y) = (\lambda x', \lambda y')$ ; ceci prouve $(x,y) \sim (x',y')$, et donc $C((x,y)) = C((x',y'))$, comme voulu.*



**Fin.**