Corrigé Examen Combinatoire (L2) lundi 7 janvier 2019
14h-16h

1. Pour chaque point ci-dessous répondre par A, B, C, ou D. Une motivation n'est pas demandée ; une bonne réponse contient une et une seule de ces lettres.

Pour les points *a* à *e* cette lettre signifie que, pour les ensembles X, Y mentionnés
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucune de ces trois possibilités s'applique, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$».

a. $X = \{0, 9, 1, 1, 4, 0\}$ et $Y = \{ k^2 \mid k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \}$.

$\surd$ *A. Les deux sont égaux à* $\{0, 1, 4, 9\}$

b. $X = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$, et $Y = \{\{0, 3\}, \{4, 1\}, \{2, 5\}\}$.

$\surd$ *D. On a* $\{0, 1\} \in X$ *mais* $\{0, 1\} \notin Y$, *et* $\{0, 3\} \in Y$ *mais* $\{0, 3\} \notin X$, *donc ni* $X \subseteq Y$ *ni* $X \supseteq Y$.

c. $X = \{0, 1, 2\}$ et $Y = f^{-1}[\{0, 1, 2, 3, 4\}]$ (une image réciproque) où $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ est défini par $f(k) = k^2$.

$\surd$ *B, car* $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$, *donc* $X \subset Y$.

d. $X = \{\{ 2n \mid n \in \mathbf{Z} \}, \{ 2n + 1 \mid n \in \mathbf{Z} \}\}$ et $Y = \{ \{ 2n + r \mid n \in \mathbf{Z} \} \mid r \in \mathbf{Z} \}$

$\surd$ *A. Dans les deux cas, c'est la partition de* $\mathbf{Z}$ *en deux parties, les nombres pairs et les nombres impairs. Mentionner chacune de ces parties plusieurs fois dans la description de* Y *n'a pas d'effet.*

e. $X = \mathcal{P}(\{1, 2\})$ (l'ensemble des parties de $\{1, 2\}$), et $Y = \{\{2\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 1\}\}$

$\surd$ *C. Car* $X = Y \cup \{\emptyset\}$.

Pour les points *f* et *g*, on donne chaque fois une relation entre $k, l \in \mathbf{Z}$; indiquer si cette relation est
A : symétrique et transitive,
B : symétrique mais pas transitive,
C : anti-symetrique et transitive,
D : aucune de ces trois possibilités s'applique

f. La relation «$k - l < 0$»

$\surd$ *C. C'est équivalent à* «$k < l$»*, une relation d'ordre (total, irréflexive), autrement dit elle est anti-symétrique et transitive.*

g. La relation «$k + l = 12$»

$\surd$ *B. Comme* $k + l = l + k$, *cette relation est symétrique, mais elle n'est pas transitive (par exemple* $5 + 7 = 12$ *et* $7 + 5 = 12$ *mais* $5 + 5 \neq 12$*).*

2. Dans chacun des descriptions suivantes, donner le nombre de valeurs/objets du type spécifié.

a. Les monômes de degré 9 en les 4 variables w, x, y, z (par exemple w^2x^5yz ou $w^4x^3z^2$).

$\surd$ *C'est le nombre de 4-uplets* $(e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathbf{N}^4$ *d'exposants de somme 9, soit* $\binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = 220$.

b. Comités de 4 membres, choisis parmi un group de 13 personnes.

$\surd$ *C'est* $\binom{13}{4} = 715$

c. Classements (listes ordonnées) de 3 gagnants, dans une compétition avec 20 participants.

$\surd$ *C'est* $20 \times 19 \times 18 = 6840$.

d. Glaces à 4 boules, choisies parmi 11 parfums (on peut avoir plusieurs boules identiques).

$\surd$ *Le nombre de choix de 4 parmi 11 avec répétitions, soit* $\binom{11+4-1}{4} = \binom{14}{4} = 1001$.

e. Les mots de longueur 11 qui contiennent 7 lettres A et 4 lettres B.

$\surd$ *Le nombre de choix pour les positions des* «*A*» : $\binom{11}{7} = 330$.

f. Les évolutions du score dans un match qui se termine sur un score de $5-4$ (une telle évolution est $[(0, 0); (0, 1); (0, 2); (1, 2); (2, 2), (3, 2), (4, 2); (4, 3); (5, 3); (5, 4)]$, où un score $a - b$ est écrit (a, b)).

$\surd$ *C'est* $\binom{5+4}{5} = \binom{9}{4} = 126$.

g. Les $(a_1,\dots,a_6)\in\mathbf{N}^6$ avec $0\le a_1<a_2<a_3<\cdots<a_6\le 15$ (N.B.: croissance stricte).

$\surd$ *C'est* $\binom{16}{6}=8008$.

h. Les $(a_1,\dots,a_5)\in\mathbf{N}^5$ avec $1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_5\le 10$ (N.B.: croissance faible).

$\surd$ *C'est* $\binom{10+5-1}{5}=\binom{14}{5}=2002$.

3. Dans cette question on prend $[n]=\{\,i\in\mathbf{N}\mid i<n\,\}=\{0,1,\dots,n-1\}$ comme ensemble à n éléments. On sait que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ compte le nombre de parties de $[n]$ à k éléments, c'est-à-dire l'ensemble $\binom{[n]}{k}=\{\,P\subseteq[n]\mid \#P=k\,\}$.

a. On fixe $n,k\in\mathbf{N}$, et on considère l'application $f:\binom{[n]}{k+1}\to[n]$ définie par $f(P)=\max(P)$ (par exemple pour $n=8$, $k=2$ et $P=\{0,2,6\}\in\binom{[8]}{3}$ on a $f(P)=6$). Pourquoi f est bien défini ?

$\surd$ *Pour que* $\max(P)$ *soit bien défini, il suffit que P soit un ensemble fini et non vide de nombres. Or ici c'est une partie de $[n]$ à $k{+}1\ge 1$ éléments, qui est bien fini et non vide. Et $P\subseteq[n]\Rightarrow\max(P)\in[n]$.*

Les “fibres” de f sont $\mathcal{F}_0,\dots,\mathcal{F}_{n-1}$, où $\mathcal{F}_i=\{\,P\in\binom{[n]}{k}\mid f(P)=i\,\}$. On rappelle que les fibres d'une application sont toujours disjointes (c'est-à-dire $\mathcal{F}_i\cap\mathcal{F}_j=\emptyset$ si $i\ne j$), et que leur réunion est égale au domaine de l'application, ici $\mathcal{F}_0\cup\cdots\cup\mathcal{F}_{n-1}=\binom{[n]}{k+1}$.

b. Il est clair de la définition de f que si P appartient à la fibre $\mathcal{F}_i$, alors $P=P'\cup\{i\}$ avec tous les éléments l de P' vérifiant $l<i$. En déduire un formule pour le nombre $\#\mathcal{F}_i$.

$\surd$ *Dans l'écriture donnée on a $\#P'=k$ et (à cause de $l<i$ pour tout $l\in\mathcal{P}'$) $P'\in\binom{[i]}{k}$. Réciproquement si $P'\in\binom{[i]}{k}$, alors $P'\cup\{i\}\in\mathcal{F}_i$, et on conclut $\#\mathcal{F}_i=\#\binom{[i]}{k}=\binom{i}{k}$.*

c. Quelles de ces fibres sont vides, c'est-à-dire pour quels $i\in[n]$ a-t-on $\mathcal{F}_i=\emptyset$?

$\surd$ *Puisque $k\in\mathbf{N}$, on a $\binom{i}{k}=0\iff i<k$, donc les fibres vides sont $\mathcal{F}_0,\dots,\mathcal{F}_{k-1}$.*

d. Déduire des réponses aux questions *b*, *c*, l'identité

$$\binom{n}{k+1}=\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i}{k}\qquad\text{pour tout } n,k\in\mathbf{N}\text{ avec } n\ge k$$

(par exemple, pour $n=8$ et $k=2$ elle dit que $\binom{8}{3}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}$).

$\surd$ *Le nombre d'éléments du domaine de f est égal à la somme des nombres d'éléments des fibres, ce qui donne ici $\binom{n}{k+1}=\#\mathcal{F}_0+\cdots+\#\mathcal{F}_{n-1}$, mais puisque $\#\mathcal{F}_i=0$ quand $i<k$ on a aussi $\binom{n}{k+1}=\#\mathcal{F}_k+\cdots+\#\mathcal{F}_{n-1}$. On a donc $\binom{n}{k+1}=\#\mathcal{F}_k+\cdots+\#\mathcal{F}_{n-1}=\binom{k}{k}+\cdots+\binom{n-1}{k}$, ce qui est l'identité cherchée.*

e. Donner une autre preuve de cette identité ainsi : on fixe $k\in\mathbf{N}$ et on montre le résultat pour tout $n\ge k$ par récurrence sur n.

$\surd$ *Le cas de base est $n=k$. Dans ce cas on a $\binom{n}{k+1}=\binom{k}{k+1}=0$ (car $k+1>k$), et la sommation est vide (car $n\le i\le n-1$ est impossible) et donc de valeur 0 ; l'identité est donc vérifiée si $n=k$. Supposant maintenant (pour l'hérédité) que $n>k$, et que l'identité est vérifiée pour $n-1$, on a :*

$$\binom{n}{k+1}=\binom{n-1}{k+1}+\binom{n-1}{k}=\sum_{i=k}^{n-2}\binom{i}{k}+\binom{n-1}{k}=\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i}{k}$$

(en appliquant la récurrence de Pascal et ensuite l'hypothèse de récurrence), comme voulu.

Fin.