Corrigé Contrôle continu L2, Combinatoire mardi 6 novembre 2018
9h00-10h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$».

On remarque que ces possibilités sont mutuellement exclusives, donc toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est forcément fausse. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{0, 1, \{2, 1\}, 2, \{1\}\}$, et $Y = \{1, \{2, 1, 2\}, 1, 0, 2, \{1, 2\}\}$

$\surd$ *C. $Y = \{0, 1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$ et $Y = \{0, 1, 2, \{1, 2\}\}$.*

b. $X = \{\, 12n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$, et $Y = \{\, 4n \mid n \in \mathbf{N}$ et n est divisible par $3 \,\}$

$\surd$ *A. Ce sont les multiples de 12 dans les deux cas.*

c. $X = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$, et $Y = \{\{0, 1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$.

$\surd$ *D. L'ensemble $\{0, 1\}$ est élément de X mais pas de Y, et l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ est élément de Y mais pas de X.*

d. $X = \{\{\, 2n + 4 \mid n \in \mathbf{Z} \,\}, \{\, 2n + 7 \mid n \in \mathbf{Z} \,\}\}$ et $Y = \{\, \{\, 2n + k \mid n \in \mathbf{Z} \,\} \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$.

$\surd$ *A. La relation admet deux classes d'équivalence, les entiers pairs et les entiers impairs, et X est l'ensemble de ces deux classes.*

e. $X = \{\, x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 3 \,\}$, et $Y = \{\, \sqrt{x} \mid x \in [0, 3] \,\}$ (ici $[0, 3]$ désigne un intervalle de $\mathbf{R}$).

$\surd$ *D. Car $X = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ et $Y = [0, \sqrt{3}]$.*

f. $X = f^{-1}[0, 5]$ (image réciproque) où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est donné par $f : x \mapsto 2x + x^3$, et $Y = [0, 2]$.

$\surd$ *B. On a f continu et strictement croissante, donc une bijection, et l'image $f[Y] = f[0, 2] = [f(0), f(2)] = [0, 12]$ contient strictement $[0, 5]$; l'image réciproque $X = f^{-1}[0, 5]$ est donc une partie stricte de $Y = [0, 2]$ (par exemple, $2 \in Y \setminus X$).*

2. Pour chacune des relations suivantes (définie sur l'ensemble indiqué), indiquer lesquels des propriétés suivantes elle possède: être réflexif, irréflexif, symétrique, anti-symétrique, transitif, être une relation d'équivalence, être une relation d'ordre partiel.

a. La relation "est un multiple entier de" définie sur $\mathbf{N}$; formellement cette relation vaut pour deux entiers naturels a et b si $\exists k \in \mathbf{N} : a = kb$.

$\surd$ *La relation est réflexive, anti-symétrique, et transitive, et c'est don une relation d'ordre partiel.*

b. La relation sur $\mathbf{Z}$ qui vaut pour $k, l \in \mathbf{Z}$ si $|k - l| < 7$.

$\surd$ *La relation est réflexive, symétrique. Comme elle n'est pas transitive, elle n'est ni relation d'ordre partiel ni relation d'équivalence.*

3. On considère sur l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels la relation $\sim$, qui exprime que la différence de deux nombres est un multiple (positif ou négatif) de 10, en formule $n \sim m \iff n - m \in \{\, 10k \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$.

a. Formuler et prouver la propriété que $\sim$ est une relation transitive.

$\surd$ *La propriété d'être transitif dit que si $a \sim b$ et $b \sim c$ alors forcément $a \sim c$. Pour la prouver, supposons $a \sim b$ et $b \sim c$, ce qui veut dire qu'il existe $k; l \in \mathbf{Z}$ tels que $a - b = 10k$ et $b - c = 10l$; alors $a - c = (a - b) + (b - c) = 10k + 10l = 10(k + l)$, et puisque $k + l \in \mathbf{Z}$ cela entraîne $a \sim c$.*

Cette relation est en fait une relation d'équivalence (on l'admet). On désigne par $Q = \mathbf{N}/\!\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation.

b. Est-ce que Q est un ensemble, fini, et si c'est le cas combien d'éléments possède Q ?

$\surd$ *L'ensemble Q est fini et contient 10 éléments : les classes de $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sont toutes distinctes, et leur réunion est $\mathbf{N}$ donc il n'y a pas d'autres classes.*

c. [bonus] Si l'on désigne pour $n \in \mathbf{N}$ par $\overline{n} \in Q$ la classe d'équivalence auquel appartient n, on souhaite définir une application $f : Q \to Q$ telle que $f(\overline{n}) = \overline{n^2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Quelle propriété doit-on vérifier pour justifier ceci comme définition de f ? (On ne demande pas de la prouver, mais vous pouvez le faire si vous voulez.)

$\surd$ *Il faut vérifier que si $\overline{n} = \overline{m}$, alors $\overline{n^2} = \overline{m^2}$ (car $f(\overline{n})$ et $f(\overline{m})$ sont les mêmes ; on ne peut pas le définir deux fois avec des valeurs différentes). Cette condition peut aussi être formulé comme $n \sim m \Rightarrow n^2 \sim m^2$. Une preuve peut être : supposons $n - m = 10k$, alors $n^2 - m^2 = (n-m)(n+m) = 10k(n+m)$, et puisque $k(n+m) \in \mathbf{Z}$, cela entraîne $n^2 \sim m^2$.*

Fin.