Examen terminal Combinatoire (L2) jeudi 5 janvier 2017
14h00-16h00

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Là où on demande une valeur, donner l'expression qui la décrit ainsi que sa valeur numérique ; dans le cas des probabilités, cette dernière avec 4 chiffres après la virgule.

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $Y \subset X$, (c'est-à-dire $Y \subseteq X$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$».

Ces possibilités étant mutuellement exclusives, toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est fausse. $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{\, (x, \sqrt{1-x^2}) \mid x \in \mathbf{R} \,\}$ et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$.
b. $X = \{\, 7n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ et $Y = \{\, n \in \mathbf{N} \mid n$ est divisible par $21 \,\}$.
c. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x < 2y + 1 \,\}$, et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \,\}$.
d. $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $Y = f^{-1}(A \cup B)$ (ici $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f), où $A = [0, 3]$ et $B = [1, 4]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$.
e. $X = f(C) \cap f(D)$ et $Y = f(C \cap D)$ (ici $f(S)$ désigne l'image directe de l'ensemble S par f), où $C = [-\pi, \pi]$ et $D = [0, 2\pi]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{6})$.

2. On jette un dé équilibré 5 fois. Quelle est la probabilité qu'au moins une fois on obtienne 1 ou 2 comme résultat ?

3. Dans chacun des choix ou ensembles suivants, donner le nombre de possibilités respectivement éléments. Le terme "mot" signifie une chaîne de caractères (lettres).

a. Les mots de longueur 12 qui contiennent 5 lettres A et 7 lettres B.
b. Les monômes en x, y, z, t de degré 7 (par exemple x^3yzt^2 ou y^3t^4).
c. Les applications injectives $\{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
d. Les évolutions du score (c'est-à-dire les suites des scores intermédiaires) possibles pour un match de foot, sachant qu'il se termine sur une score de 6–4.
e. Les suites $(a_1, \ldots, a_{10})$ avec $a_i \in \mathbf{N}$ pour tout i, qui vérifient $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_9 < a_{10} \leq 16$.
f. Les commandes que peut faire de 4 pizzas, choisissant parmi 18 types de pizza proposés.

4. Dans un jeu de 52 cartes (avec 4 «couleurs» et 13 «valeurs») on sélectionne une «main» de 4 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?
b. Combien parmi ces mains contiennent une carte de chacune des 4 couleurs ?
c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard contienne une carte de chacune des 4 couleurs ?
d. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard contienne des cartes ayant 4 *valeurs* distinctes ?

5. Une expérience aléatoire consiste a sélectionner au hasard 3 parmi les 9 cases d'une grille de 3 lignes et 3 colonnes. Chacune des $\binom{9}{3}$ possibilités a la même probabilité. Soit A l'évènement «on a choisi une case dans chaque ligne», et B l'évènement «on a choisi une case dans chaque colonne».

a. Déterminer les probabilités $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$ de ces évènements.
b. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(A \mid B)$ (dit : A sachant B).
c. Est-ce que A et B sont des évènements indépendants ?

6. On fait une expérience aléatoire qui consiste a lancer une pièce équilibrée 2 fois. En termes des résultats de cette expérience, une variable aléatoire X est définie ainsi : si le premier résultat était pile et le second face on a $X = 3$, si le premier résultat était face et le second pile on a $X = 0$, et dans les autres cas (deux résultats identiques) on a $X = 1$. Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(X)$ de X.
[Question bonus: calculer aussi la variance $\mathrm{Var}(X)$ et l'écart-type σ_X.]

Fin.