Corrigé Examen terminal Combinatoire (L2) mercredi 6 janvier 2016
14h00-16h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit : A : $X = Y$, B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ et $X \neq Y$), C : $Y \subset X$, D : aucun des trois précédents, c'est-à-dire on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$.

a. $X = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0 \}$, et $Y = \{ (0,t) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in \mathbf{R} \} \cup \{ (t,0) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in \mathbf{R} \}$.

$\surd$ *Les deux ensembles sont égaux, A.*

b. $X = \{ [0,n] \mid n \in \mathbf{N} \}$ et $Y = \{ [1,n] \mid n \in \mathbf{N} \}$, où $[a,b]$ désigne l'intervalle $\{ i \in \mathbf{N} \mid a \leq i \leq b \}$ de $\mathbf{N}$. (Remarque : X, Y ne sont pas des sous-ensembles de $\mathbf{N}$, mais de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.)

$\surd$ *Il n'y a pas d'inclusion entre ces ensembles: D.*

c. $X = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = \sqrt{3y+2} \}$ et $Y = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 = 3y+2 \}$.

$\surd$ *Comme $x = \sqrt{3y+2}$ implique $x^2 = 3y+2$, on a $X \subseteq Y$. Mais $X \neq Y$ car par exemple $(-\sqrt{5}, 1) \in Y \setminus X$. Donc B.*

d. $X = f(A) \cap f(B)$ et $Y = f(A \cap B)$ (où $f(S)$ désigne l'image directe de l'ensemble S par f) avec concrètement $f = \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et les intervalles $A = [-\pi, \pi]$ et $B = [0, 2\pi]$ de $\mathbf{R}$.

$\surd$ *On a toujours $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, car si $x \in A \cap B$ alors $f(x) \in f(A)$ et aussi $f(a) \in f(B)$. Mais les deux ne sont pas égaux en général, et dans l'exemple concret non plus: on a $X = [-1,1] \cap [-1,1] = [-1,1]$ mais $Y = \sin([0,\pi]) = [0,1]$. Donc C.*

e. $X = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ et $Y = f^{-1}(C \cap D)$ (où $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f) avec concrètement $f = \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et les intervalles $C = [0, \frac{3}{4}]$ et $D = [\frac{1}{2}, 2]$ de $\mathbf{R}$.

$\surd$ *On a toujours $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = \{ x \mid f(x) \in C, f(x) \in D \} = f^{-1}(C \cap D)$, donc A.*

2. Dans un jeu de 32 cartes (avec 4 «couleurs» et 8 «valeurs») on sélectionne une «main» de 5 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?

$\surd$ $\binom{32}{5}$, *qui vaut* 201376

b. Combien parmi ces mains ne contiennent pas deux cartes avec une même valeur ?

$\surd$ $\binom{8}{5} \times 4^5 = \frac{32 \times 28 \times 24 \times 20 \times 16}{5!}$, , *qui vaut* 57344.

c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard contienne 5 valeurs différentes ?

$\surd$ $\frac{32 \times 28 \times 24 \times 20 \times 16}{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28} = \frac{2^8}{31 \times 29} = \frac{256}{899} = 57344/201376 \approx 0{,}285$.

3. Dans chacun des choix ou ensembles suivants, donner le nombre de possibilités respectivement éléments. Le terme "mot" signifie une chaîne de caractères, chacun pris parmi les lettres spécifiés.

a. Les monômes en x, y, z de degré 10 (par exemple x^3yz^6 ou x^8y^2).

$\surd$ *Le nombre de choix de* 10 *parmi* 3 *avec répétitions, soit* $\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$.

b. Les commandes que peut faire dans un restaurant un groupe de 5 personnes, choisissant chacune un plat parmi 9 proposés sur la carte. Pour chaque plat seulement le *nombre* de choix est noté.

$\surd$ *Le nombre de choix de* 5 *parmi* 9 *avec répétitions, soit* $\binom{5+9-1}{5} = \binom{13}{5} = 1287$.

c. Les mots de longueur 13 qui contiennent 5 lettres A et 8 lettres B.

$\surd$ *Le nombre de choix pour les positions des «A» :* $\binom{13}{5} = 1287$.

d. Les suites $(a_1, \ldots, a_8) \in \mathbf{N}^8$ qui vérifient $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_7 \leq a_8 \leq 12$.

$\surd$ *Le nombre de choix de* 8 *parmi* 12 *avec répétitions, soit* $\binom{8+12-1}{8} = \binom{19}{8} = 75582$.

e. Les évolutions de score (suites de scores intermédiaires) possibles pour un match de foot qui se termine sur une score de 10–7.

$\surd$ *Le nombre de chemins de réseau do* $(0,0)$ *vers* $(10,7)$ *est* $\binom{10+7}{10} = \binom{17}{10} = \binom{17}{7} = 19448$.

4. Dans un espace probabilisé, il est donné pour deux évènements A, B que $\mathbf{P}(A) = 5/8$, $\mathbf{P}(B) = 5/9$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 5/6$.

a. Déterminer $\mathbf{P}(A \cap B)$.

$\surd$ *On a* $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ *donc* $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 5/8 + 5/9 - 5/6 = 25/72$.

b. Déterminer $\mathbf{P}(A^c \cup B^c)$ (où E^c désigne l'événement complémentaire de E).

$\surd$ $\mathbf{P}(A^c \cup B^c) = \mathbf{P}()^c) = 1 - 25/72 = 47/72$.

c. Est-ce que les évènements A, B sont indépendants ?

$\surd$ *On a* $\mathbf{P}(A \cap B) = 25/72 = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, *donc oui, ils sont indépendants.*

5. Pour chaque jour de la semaine, une personne prise au hasard a une probabilité $1/7$ d'être née un tel jour. Quelle est la probabilité *conditionnelle* que, parmi 3 personnes prises au hasard, une soit née un mercredi, sachant qu'il n'y a pas deux parmi les 3 qui sont nées le même jour de la semaine ?

$\surd$ *Les jours de naissance forment une partie de trois jours de la semaine choisies au hasard (probabilité uniforme sur les* $\binom{7}{3}$ *possibilités). Intuitivement la probabilité que l'un de ces jours soit un mercredi est* $3/7$*, et c'est la bonne réponse. On pourra la justifier en comptant les issues favorables comme* $\binom{6}{2}$ *(le mercredi est obligatoire, on choisit deux autre jours parmi les* 6 *restants), et* $\binom{6}{2}/\binom{7}{3} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$.

6. On jette un dé 7 fois. Quelle est la probabilité qu'au moins une fois on obtienne le résultat « 6 » ?

$\surd$ *L'évènement complémentaire est d'obtenir* 7 *fois de suite un résultat différent de* 6*, pour lequel la probabilité est* $(5/6)^7 = \frac{5^7}{6^7}$. *La probabilité demandée est donc* $1 - \frac{5^7}{6^7} = \frac{201811}{279936} \approx 0{,}721$.

7. Une variable aléatoire réelle X prend les valeurs $1, 3, 5, 7$, avec probabilités respectives $7/64$, $11/64$, $21/64$, et $25/64$. Calculer l'espérance mathématique $\mathbf{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et l'écart-type σ_X.

$\surd$ *L'espérance est* $\mathbf{E}(X) = (1 \times 7 + 3 \times 11 + 5 \times 21 + 7 \times 25)/64 = 5$. *La variance est* $\mathrm{Var}(X) = (16 \times 7 + 4 \times 11 + 0 \times 21 + 4 \times 25)/64 = 4$ *; l'écart-type est* $\sigma_X = \sqrt{(}\mathrm{Var}(X)) = 2$.

8. Une association compte parmi ses membres des habitants de trois quartiers qu'on désigne par A, B, C. Il y a 7 habitants du quartier A, 20 habitants du quartier B et 13 habitants du quartier C. Au sein de cette association il faut former un comité de 12 personnes.

a. De combien façons peut-on choisir ce comité, sans condition sur la provenance de ses membres ?

$\surd$ $\binom{7+20+13}{12} = \binom{40}{12} = 5\,586\,853\,480$.

b. Si l'on exige que le comité contienne au moins un membre provenant de chaque quartier, quelle est le nombre de possibilités restantes de choisir ce comité?

$\surd$ *Soit* $N_{BC} = \binom{20+13}{12}$ *le nombre de comités qu'on peut choisir avec que des membres des quartiers* B, C*, et de façon similaire* $N_{AC} = \binom{7+13}{12}$ *et* $N_{AB} = \binom{7+20}{12}$. *On cherche le complémentaire de la réunion des ces ensembles de mauvais choix, mais ces ensembles ne sont pas disjoints : on a* $N_B = \binom{20}{12}$ *comités qui ne contiennent que des habitants de B, et qui comptent donc dans* N_{AB} *et dans* N_{BC} *; de façon similaire* $N_C = \binom{13}{12}$ *comités ne contiennent que des habitants de C et comptent dans* N_{AC} *et dans* N_{BC} *(il n'y a pas de comités possibles avec que des habitants de A, c'est-à-dire* $N_A = \binom{7}{12} = 0$*). Le nombre cherché est* $\binom{40}{12} - N_{BC} - N_{AC} - N_{AB} + N_B + N_C = 5\,586\,853\,480 - 354\,817\,320 - 125\,970 - 17\,383\,860 + 125\,970 + 13 = 5\,214\,652\,313$.

c. [bonus] Si le comité est formé par tirage au sort (toutes les possibilités comme dans la question *a* ayant la même probabilité), quel est la probabilité (en 3 chiffres après la virgule de précision) que le comité contienne *au moins deux* habitants de chaque quartier ?

$\surd$ *Pour un calcul exact, on pourra d'abord calculer le nombre de cas favorables, en prenant comme point de départ la réponse à la question b. Il faudra enlever de ce nombre les nombre de comités avec précisément 1 habitant d'un quartier, par exemple* $\binom{7}{1}\binom{33}{11}$ *pour le quartier A (en multipliant les nombres de choix pour ce membre et pour les 11 autres. Après déduction de ces nombres pour les trois quartiers, il faudra comme avant rajouter les choix doublement exclus, avec donc us seul membre pour deux quartiers à la fois, par exemple* $\binom{7}{1}\binom{20}{1}\binom{17}{10}$ *pour les quartiers A,B. Certains de ces nombres sont tellement petits (moins d'un million) qu'ils affecteront la probabilité qu'après le troisième chiffre. Voici le calcul exact :* $5\,214\,652\,313 - 7\binom{33}{11} - 20\binom{20}{11} - 13\binom{27}{11} + 140\binom{13}{10} + 91\binom{20}{10} = 5\,214\,652\,313 - 1\,354\,757\,040 - 3\,359\,200 - 169\,492\,635 + 40040 + 16\,812\,796 = 3\,703\,896\,274$.
Finalement la probabilité demandée est $3\,703\,896\,274/5\,586\,853\,480 \approx 0{,}663$.

Fin.