Contrôle continu L2, Combinatoire lundi 3 novembre 2014
14h00-15h00

L'utilisation des calculatrices (ou de tout appareil électronique) est interdite. Toutefois si dans votre réponse vous obtenez une expression arithmétique difficile à évaluer sans calculatrice, vous pouvez donner cette expression comme réponse.

1. Répondez « vrai » ou « faux ». (Une justification n'est pas demandée.)

a. L'application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ vérifiant $f(n) = n(n+1)$ est injective.

b. Une application $X \to Y$ possède une application réciproque $Y \to X$ si et seulement si elle est bijective.

c. Si $f : X \to Y$ est une application, et $P \subseteq X$ est une partie finie, alors $\#P = \#f[P]$. (Ici $f[P]$ est l'image $\{\, f(p) \mid p \in P \,\} \subseteq Y$ du sous-ensemble P par f, et $\#E$ le nombre d'éléments de E.)

d. La relation R sur $\mathbf{Z}$ est transitive, où $R(m,n)$ est la condition $m + 3 \leq n$.

e. Si l'application $f : X \to Y$ est surjective, alors l'application $g : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ définie par $g(B) = f^{-1}[B]$ (l'image réciproque par f de la partie $B \subseteq Y$) est aussi surjective.

2. Soit $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^7$, l'ensemble des 7-uplets $(c_1, c_2, \ldots, c_7)$ de chiffres décimaux.

a. Quel est le nombre $\#X$ d'éléments de X ?

b. Soit $X_1 = \{\, (c_1, c_2, \ldots, c_7) \in X \mid \text{la somme } c_1 + c_2 + \cdots + c_7 \text{ est pair} \,\}$. Déterminer $\#X_1$.

c. Soit $X_2 = \{\, (c_1, c_2, \ldots, c_7) \in X \mid \text{le produit } c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7 \text{ est pair} \,\}$. Déterminer $\#X_2$.

d. Soit $X_3 = \{\, (c_1, c_2, \ldots, c_7) \in X \mid c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < c_6 < c_7 \,\}$. Déterminer $\#X_3$.

e. Soit $X_4 \subseteq X$ le sous-ensemble des 7-uplets contenant une suite de chiffres $1, 2, 3$ (formellement: les $(c_1, c_2, \ldots, c_7)$ tels qu'il existe $i \leq 5$ avec $c_i = 1$, $c_{i+1} = 2$, et $c_{i+2} = 3$). Déterminer $\#X_4$.

f. Soit $X_5 \subseteq X$ le sous-ensemble des 7-uplets ne contenant *aucune* suite de chiffres $7, 4, 7$ (condition définie formellement comme dans la question précédente). Déterminer $\#X_5$.

Fin.