Corrigé Examen Combinatoire et Géométrie (L2)

lundi 22 juin 2020
10h, à remettre dans les 72 heures

Combinatoire

1. Pour chaque point ci-dessous répondre par A, B, C, ou D selon les inclusions éventuelles entre X et Y, selon la clé suivante

A : on a $X \subseteq Y$ et $X \supseteq Y$ (autrement dit on a $X = Y$) ;
B : on a $X \subseteq Y$ et $X \not\supseteq Y$ (autrement dit on a $X \subset Y$) ;
C : on a $X \not\subseteq Y$ et $X \supseteq Y$ (autrement dit on a $X \supset Y$) ;
D : on a $X \not\subseteq Y$ et $X \not\supseteq Y$ (il n'y a pas d'inclusion entre X et Y).

[On rappelle que l'inclusion d'un ensemble P dans un ensemble Q est exprimé par $P \subseteq Q$, que le symbole « $\supseteq$ » désigne la relation réciproque (donc $P \supseteq Q$ veut dire $Q \subseteq P$), et que $P \not\subseteq Q$ est la négation de $P \subseteq Q$. Chaque réponse doit indiquer une et une seule des lettres A, B, C, D.]

a. $X = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}$ et $Y = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 0\}, \{4, 1\}, \{5, 2\}\}$.

$\surd$ *A. Comme l'ordre d'élément dans un ensemble est ignoré on a $\{0, 3\} = \{3, 0\}$ etc., et comme la répétition d'une même valeur est ignorée le rajout des trois dernier éléments dans la liste de Y n'a pas d'effet ; les deux ensembles sont identiques.*

b. $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, et $Y = \mathcal{P}(\{1, 2\}) \cup \mathcal{P}(\{1, 3\}) \cup \mathcal{P}(\{2, 3\})$.

$\surd$ *C. Chaque partie d'une partie de $\{1, 2, 3\}$ est elle-même une partie de $\{1, 2, 3\}$, et cela s'applique en particulier pour un élément de Y, qui par définition de la réunion est une partie de $\{1, 2\}$, de $\{1, 3\}$, ou de $\{2, 3\}$; ainsi $X \supseteq Y$. Mais $\{1, 2, 3\} \in X$ pendant que $\{1, 2, 3\}$ n'est ni partie de $\{1, 2\}$, ni de $\{1, 3\}$, ni de $\{2, 3\}$, donc $\{1, 2, 3\} \notin Y$; on a $X \not\subseteq Y$ et donc $X \supset Y$.*

c. $X = \{\, (x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \,\}$, et $Y = \{\, (y^2, y) \mid y \in \mathbb{R} \,\}$.

$\surd$ *B. Si $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on peut choisir $y = \sqrt{x}$ (qui vérifie $y \geq 0$ et $y^2 = x$ par définition de la racine carrée) et dans ce cas $(x.\sqrt{x}) = (y^2, y)$; ceci montre $X \subseteq Y$. Mais pour $y < 0$, par exemple $y = -4$, il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $\sqrt{x} = y$, donc par exemple $(16, -4) \notin X$ pendant que $(16, -4) \in Y$, donc $X \not\supseteq Y$, et $X \subset Y$.*

2. On définit un *octet* comme une suite $(b_0, \dots, b_7)$ de 8 bits, c'est-à-dire un élément de $\{0, 1\}^8$; on désigne par X l'ensemble des $2^8 = 256$ différents octets. En utilisant l'application $s : X \to \mathbb{N}$ donnée par $s(b_0, \dots, b_7) = b_0 + \cdots + b_7$ on définit une relation $\mathcal{R}$ sur X par $x \mathrel{\mathcal{R}} y \iff s(x) = s(y)$.

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

$\surd$ *C'est très facile, la définition précise de s n'a même pas besoin d'être utilisée. Réflexivité : pour tout $x \in X$ on a évidemment $s(x) = s(x)$, donc $x \mathrel{\mathcal{R}} x$; symétrie si pour $x, y \in X$ on a $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ donc $s(x) = s(y)$, alors aussi $s(y) = s(x)$ et donc $y \mathrel{\mathcal{R}} x$; transitivité : si $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ donc $s(x) = s(y)$ et $y \mathrel{\mathcal{R}} y$ donc $s(y) = s(z)$, alors $s(x) = s(z)$ donc $x \mathrel{\mathcal{R}} z$.*

b. Déterminer le nombre n de classes d'équivalence pour cette relation, et donner pour chaque classe un représentant de la classe ainsi que le nombre d'éléments de cette classe (vous aurez donc n tels nombres, dont la somme doit être 256).

$\surd$ *L'expression $s(x)$ peut prendre 9 valeurs distinctes, à savoir $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, et pour chaque $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ on trouve facilement un exemple de $x \in X$ avec $s(x) = k$, par exemple l'octet dont les k derniers bits sont 1 et les autres 0. Le nombre de tels solutions x est $\binom{8}{k}$. On trouve*

($k = 0$) la classe de $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ qui contient 1 élément,
($k = 1$) la classe de $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ qui contient 8 éléments,
($k = 2$) la classe de $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ qui contient 28 éléments,
($k = 3$) la classe de $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ qui contient 56 éléments,
($k = 4$) la classe de $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ qui contient 70 éléments,
($k = 5$) la classe de $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ qui contient 56 éléments,
($k = 6$) la classe de $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ qui contient 28 éléments,
($k = 7$) la classe de $(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ qui contient 8 éléments,
($k = 8$) la classe de $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ qui contient 1 élément.

3. Donner le cardinal (le nombre d'éléments) de chacun des ensembles suivants. Indiquer la méthode (formule) utilisée et la valeur numérique.

a. L'ensemble $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7\})$ de toutes les parties de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

$\surd$ $2^7 = 128$.

b. $\{\, P \subseteq \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\} \mid \#P = 7 \,\}$ (où $\#P$ désigne le cardinal de P), c'est-à-dire l'ensemble des parties de cardinal 7 de l'ensemble des diviseurs positifs de 60.

$\surd$ *C'est* $\binom{12}{7} = 792$.

c. $\{\, (k_1, \ldots, k_7) \in \mathbb{N}^7 \mid k_1 + \cdots + k_7 = 13 \,\}$

$\surd$ *Le cardinal est* $\binom{13+7-1}{13} = \binom{19}{13} = \binom{19}{6} = 27132$.

4. L'égalité de polynômes $(1+X)^3(1+X)^3 = (1+X)^6$ donne, en appliquant la formule du binôme, concrètement $(1+3X+3X^2+X^3)(1+3X+3X^2+X^3) = 1+6X+15X^2+20X^3+15X^4+6X^5+X^6$. La phrase «comparer dans cette formule les coefficients en degré 3» veut dire : constater d'abord que le terme $20X^3$ à droite est obtenu à gauche comme $1 \times X^3 + 3X \times 3X^2 + 3X^2 \times 3X + X^3 \times 1$, et en tirer l'égalité des coefficients $1 \times 1 + 3 \times 3 + 3 \times 3 + 1 \times 1 = 20$. Formuler une égalité générale concernant les coefficients binomiaux qu'on obtient ainsi, pour un entier naturel n quelconque, en comparant dans la formule $(1+X)^n(1+X)^n = (1+X)^{2n}$ les coefficients en degré n.

Géométrie

5. Soit L le plan affine de $\mathbb{R}^4$ définie en forme implicite par

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Ecrire L en forme explicite.

6. Soit H le plan affine de $\mathbb{R}^3$ défini en forme explicite par

$$H := \{\, \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{v} = (0,1,0) + \lambda(2,0,1) + \mu(-1,1,1), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,\}.$$

Ecrire H en forme implicite.

7. Considérons le triangle de sommets

$$\underline{a} = (3,1), \qquad \underline{b} = (-2,2), \qquad \underline{c} = (-2,-1).$$

a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection $\underline{s}$ des médianes.
b. Déterminer les equations implicites des hauteurs $H_{\underline{a}}$ et $H_{\underline{b}}$.
c. Déterminer le point d'intersection $\underline{h}$ des hauteurs .
d. Déterminer l'équation implicite de la droite d'Euler.

Fin.