Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2 lundi 8 janvier 2018
14h–17h

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X-1 & 10 & -2 \\ 2 & X-3 & 2 \\ 1 & -11 & X+2 \end{vmatrix}$$

est un peu fastidieux mais possible, et donne $X^3+X^2(-1-3+2)+X(\left|\begin{smallmatrix} -1 & 10 \\ 2 & -3 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ -11 & 2 \end{smallmatrix}\right|) - \det A = X^3 - 2X^2 + X(-17+0+16) - -2 = X^3 - 2X^2 - X + 2$. *C'est un peu plus simple si l'on additionne la première ligne à la dernière, puis soustrait la dernière colonne de la première, donnant*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 10 & -2 \\ 2 & X-3 & 2 \\ X & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & 10 & -2 \\ 0 & X-3 & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X+1)(X^2-3X+2).$$

(ce qui après multiplication donne bien sur aussi $\chi_A = X^3 - 2X^2 - X + 2$*).*

b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ *Les racines rationnelles sont diviseurs du coefficient constant* 2 *de* χ_A*. Effectivement* -1, 1 *et* 2 *sont de telles racines, et on a la décomposition* $X^3-2X^2-X+2 = (X+1)(X-1)(X-2)$.

c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique étant scindé et à racines sont simples,* ϕ *est diagonalisable. Pour* $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ *et* $\lambda = 2$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$A+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 11 & -1 \end{pmatrix}, \quad A-\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 11 & -3 \end{pmatrix}, \quad A-2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & -10 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 11 & -4 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à

$$\begin{pmatrix} 1 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

montrant que chacune a un noyaux de dimension 1*, avec comme générateurs respectivement les vecteurs* $(-1,0,1)$, $(-4,1,5)$, *et* $(-6,2,7)$, *qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda = -1$, *pour* $\lambda = 1$ *et pour* $\lambda = 2$.

d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *On choisit les trois vecteurs* $(-1,0,1)$, $(-4,1,5)$, *et* $(-6,2,7)$ *comme base* $\mathcal{B}$, *pour lequel la matrice de passage* P *de la base canonique vers* $\mathcal{B}$ *et son inverse sont*

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et puisque $\mathcal{B}$ *est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres* $-1,1,2$ *on aura* $A = PDP^{-1}$ *pour la matrice diagonale* D *de coefficients diagonaux* $-1,1,2$. *Alors* $A^n = PD^nP^{-1}$ *où* D^n *est la matrice diagonale à coefficients diagonaux* $(-1)^n, 1^n, 2^n$, *ce qui donne*

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3a-8b+6c & 2a+4b-6c & 2a-8b+6c \\ 2b-2c & -b+2c & 2b-2c \\ -3a+10b-7c & -2a-5b+7c & -2a+10b-7c \end{pmatrix}$$

où $a = (-1)^n$, $b = 1^n = 1$, $c = 2^n$.

2. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Pourquoi ϕ définit-il, par restriction au sous-espace $V = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique, un endomorphisme $\phi|_V$ de V ?

$\surd$ *Parce que* V *est* ϕ*-stable. Et cela est le cas parce que les deux premières colonnes de* M *(qui donnent* $\phi(e_1)$ *et* $\phi(e_2)$*, et qui engendrent* $\phi(V)$*) ont des coefficients nuls au delà de la seconde ligne, c'est-à-dire ces colonnes sont dans* $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = V$.

b. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_{\phi|_V}$ de cette restriction.

$\surd$ *La matrice de* $\phi|_V$ *par rapport à la base* $[e_1, e_2]$ *de* V *est* $\left(\begin{smallmatrix} -5 & -6 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, *dont le polynôme caractéristique est* $X^2 - 1$.

c. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$. En le factorisant, vous constaterez que χ_ϕ a une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple qu'on appellera ν.

$\surd$ *Puisque* M *est une matrice triangulaire en blocs, avec deux blocs diagonaux de taille* 2×2 *chacun, le polynôme caractéristique* $\chi_\phi = \chi_M$ *est le produit du polynôme caractéristique* $\chi_{\phi|_V}$ *du bloc en haut à gauche, et celui du bloc diagonal* $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ *en bas à droite, qui s'évalue à* $X^2 - 2X + 1$. *Donc* $\chi_\phi = (X^2-1)(X^2-2X+1) = (X+1)(X-1)^3$, *et il a* $\lambda = -1$ *comme racine simple et* $\nu = 1$ *comme racine triple.*

d. Déterminer l'espace propre E_ν pour la racine triple. Est-ce que ϕ est diagonalisable ?

$\surd$ *On a* $E_\nu = E_1 = \ker(M - \mathbf{I})$ *avec*

$$M - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{méthode de Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont le noyau est engendré par le vecteur $(-1,1,0,0)$. *Comme il est de dimension* $1 < 3$ *(la multiplicité de* $\nu = 0$ *comme racine de* χ_M*),* ϕ *n'est pas diagonalisable.*

e. Calculer le rang de la matrice $(M - \nu I)^2$; en déduire la valeur du polynôme minimal μ_ϕ.

$\sqrt{}$ *On a*

$$(M - \mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -14 & -8 \\ -8 & -8 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2 *(les deux premières lignes sont indépendantes), donc* $\mathrm{Ker}((M - \nu I)^2)$ *est de dimension* $4 - 2 = 2$*. Ce noyau est contenu dans le sous-espace caractéristique* $\widetilde{E}_1$ *(qui est égal à* $\mathrm{Ker}((M - \mathbf{I})^k)$ *pour k suffisamment grand), dont la dimension est la multiplicité* 3 *de* ν *comme racine du polynôme caractéristique ; on conclut que* $\mathrm{Ker}((M - \mathbf{I})^2) \neq \widetilde{E}_1$*, et* $(X - 1)^2$ *n'est pas polynôme annulateur la restriction* $\phi|_{\widetilde{E}_0}$*. Le polynôme minimal de* $\phi|_{\widetilde{E}_0}$ *est donc* $(X - 1)^3$*. Le polynôme minimal de* $\phi|_{\widetilde{E}_{-1}} = \phi|_{E_{-1}}$ *est* $X + 1$*, donc le polynôme minimal de* ϕ *(ou de* M*) est* $\mu_\phi = (X + 1)(X - 1)^3$ *(il est égal au polynôme caractéristique).*

f. Décrire explicitement (en donnant une base de chacun) les sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de ϕ ; ils figurent dans une décomposition $\mathbf{C}^4 = \widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu$.

$\sqrt{}$ *Pour déterminer* $\widetilde{E}_\lambda = E_{-1}$*, on se sert de la matrice*

$$M + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\textit{méthode de Gauss}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont le noyau est $\mathrm{Vect}\big((-3, 2, 0, 0)\big)$*. Pour l'autre espace caractéristique* $\widetilde{E}_\nu = \widetilde{E}_1$ *qui est de dimension 3, on a d'après la question précédente* $\widetilde{E}_1 = \ker((M - \mathbf{I})^3)$*, et on sait que la matrice* $(M - \mathbf{I})^3$ *est de rang* 1*. Pour la calculer sans trop d'effort ou de risque d'erreur, on peut l'écrire* $(M - \mathbf{I})(M - \mathbf{I})^2$*, observer que les colonnes de* $(M - \mathbf{I})^2$ *sont toutes de la forme* $v = (a, b, 0, 0)$*, et que puisque les deux premières colonnes de* $M - \mathbf{I}$ *sont égales, disons* C*, on a* $(M - I)v = (a + b)C$ *pour ce* v *; les colonnes de* $(M - \mathbf{I})^3$ *sont donc des multiples de* C *par respectivement* 4, 4, -10, *et* 8 *(ce sont les valeurs de* $a + b$ *dans les colonnes de* $(M - \mathbf{I})^2$*), et les lignes de* $(M - \mathbf{I})^3$ *sont donc toutes des multiples de* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$*. Ainsi* $\widetilde{E}_1 = \ker((M - \mathbf{I})^3) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$*, et une base est par exemple* $[(-1, 1, 0, 0), (5, 0, 2, 0), (-2, 0, 0, 1)]$*. Une méthode plus facile de trouver* $\widetilde{E}_1$ *est comme l'image de* $M + \mathbf{I}$ *(car celui-ci agit comme* 0 *sur le facteur* $\widetilde{E}_{-1}$ *dans la somme directe, et de façon inversible sur l'autre facteur* $\widetilde{E}_1$*, d'où son image est égale à* $\widetilde{E}_1$*), et on peut ainsi trouver la description* $\widetilde{E}_1 = \mathrm{Vect}\big((-1, 1, 0, 0), (0, 2, 0, -1), (1, 0, 2, 2)\big)$*.*

g. Trouver une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation, et détailler la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\phi)$.

$\sqrt{}$ *Pour une base de trigonalisation, on peur commencer pour* $\lambda = -1$ *avec la base trouvée* $[b_1] = [(3, -2, 0, 0)]$ *de* E_{-1}*, mais il faut remplacer la de* $\widetilde{E}_1$ *ci-dessus par une base adaptée à la chaîne de sous-espaces* $\{0\} \subset E_1 \subset \ker((M - \mathbf{I})^2) \subset \widetilde{E}_1$*. On commence donc la base de* $\widetilde{E}_1$ *avec le vecteur propre* $b_2(-1, 1, 0, 0)$*. Ensuite il faut compléter à une base de* $\ker((M - \mathbf{I})^2$*, et on peut déduire de la matrice* $(M - \mathbf{I})^2$ *déjà calculée un solution indépendante de* b_2*, par exemple* $b_3 = (3, 0, 2, 1)$*. Finalement on complète la base de* $\widetilde{E}_1$ *avec n'importe quel vecteur indépendant, par exemple* $b_4(0, 2, 0, -1)$ *(on a beaucoup de choix, mail il faut rester dans le noyau de* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$*). Pour* $\mathcal{B} = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ *on a, puisque* $\phi(b_1) = -b_1$*,* $\phi(b_2) = b_2$*,* $\phi(b_3) = 16b_2 + b_3$ *et* $\phi(b_4) = (-14, 10, -4, -3) = 8b_1 - 2b_3 + b_4$*, que*

$$\mathrm{Mat}_B(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\chi_\phi = X^4 + X^3 - X - 1$. Ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$, mais ses racines réelles sont toutes dans $\mathbf{Z}$ (ce qui aide à les trouver).

a. Quelle est $\dim(E)$?

$\surd$ *C'est égal à* $\deg(\chi)\phi) = 4$.

b. Pourquoi sait-on que ϕ n'est pas diagonalisable (sur $\mathbf{R}$) ?

$\surd$ *Pour être diagonalisable sur* $\mathbf{R}$*, il est nécessaire que* χ_ϕ *soit scindé sur* $\mathbf{R}$*, mais c'est pas le cas :* $\chi_\phi = (X+1)(X-1)(X^2+X+1)$ *avec le dernier facteur irréductible dans* $\mathbf{R}[X]$*.*

c. Décomposer $\chi_\phi = PQ$, avec le facteur P scindé sur $\mathbf{R}$, et le facteur Q sans racines réelles.

$\surd$ $\chi_\phi = (X^2-1)(X^2+X+1)$*, c'est-à-dire* $P = X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ *et* $Q = X^2 + X + 1$*.*

d. Argumenter que P et Q sont premiers entre eux.

$\surd$ *Les facteurs irréductibles d'un polynôme scindé sont tous de degré 1, pendant que un polynôme est sans racine s'il n'a aucun facteur de degré 1 ; alors il est clair que* P *et* Q *ne peuvent pas avoir un facteur irréductible commun.*

e. Le lemme des noyaux donne donc $E = V \oplus W$ avec $V = \mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $W = \mathrm{Ker}(Q[\phi])$ (car $\chi_\phi = PQ$ est polynôme annulateur de ϕ). Quels sont les polynômes caractéristiques de la restriction $\phi|_V$ de ϕ à V, et de la restriction $\phi|_W$ de ϕ à W ?

$\surd$ *Ce sont* P *respectivement* Q*. Un argument n'était pas demandé ici, mais en voici un. En appliquant le lemme des noyaux de nouveau à la décomposition* $P = (X+1)(X-1)$ *on voit que* $V = \ker(\phi + \mathbf{I}) \oplus \ker(\phi - \mathbf{I})$*, c'est la somme directe des espaces propres* E_{-1} *et* E_1*, qui sont chacun de dimension 1 (car les racines de* χ_ϕ *sont simples), et donc* $\chi_{\phi|_V} = (X+1)(X-1) = P$*. Puisque* $\chi_{\phi|_V}\chi_{\phi|_W} = \chi_\phi = PQ$ *il en découle que* $\chi_{\phi|_W} = Q$*.*

f. Montrer que $\phi|_V$ est diagonalisable, et qu'en revanche $\phi|_W$ n'a aucun vecteur propre.

$\surd$ *Le polynôme* P *est annulateur de* $\phi|_V$ *(par définition de* V*) et puisqu'il est à racines simples,* $\phi|_V$ *est diagonalisable (on le voyait aussi dans la réponse précédente). En revanche* $\phi|_W$ *a un polynôme annulateur* Q *sans racines réelles, ce qui exclut la possibilité de valeurs propres (car elles doivent être parmi les racines du polynôme annulateur).*

g. On choisit dans V une base de vecteurs propres de $\phi|_V$ (en prenant les différentes valeurs propres dans l'ordre croissant) et dans W on choisit une base dont chaque vecteur sauf le premier est l'image par $\phi|_W$ du vecteur précédent de la base. En combinant les deux bases on obtient une base $\mathcal{B}$ de E. Décrire la matrice $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\phi)$ (elle est entièrement déterminée).

$\surd$ *La matrice demandée est diagonale en blocs avec comme blocs les matrices de* $\phi|_V$ *et* $\phi|_W$ *par rapport aux bases choisies de* V *respectivement* W*. Le premier bloc est la matrice diagonale avec coefficients diagonaux* $-1, 1$*. Le second bloc est aussi une matrice* 2×2*. Tout d'abord, comme* W *ne contient aucun vecteur propre, on peut prendre n'importe que vecteur* $b \in W \setminus \{0\}$ *comme premier vecteur de la base, et* $[b, \phi(b)]$ *sera libre et donc une base de* W*, du type indiqué dans la question. Par ce choix la première colonne du second bloc sera* $\binom{0}{1}$*, et ce bloc sera donc une matrice compagnon d'un polynôme unitaire* S *de degré 2 (qui détermine sa seconde colonne) ; puisque le polynôme minimal (et caractéristique) de ce bloc sera alors* S*, et* $Q = X^2 + X + 1$ *est polynôme annulateur (et caractéristique) de* $\phi|_W$*, on conclut* $S = Q$*, d'où le résultat final*

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Fin.