Contrôle continu L2, Algèbre Linéaire 2 mercredi 8 novembre 2017
8h15–10h15

La consultation du cours écrit, ainsi que de vos notes personnelles, est autorisée. L'utilisation d'une calculatrice, ou tout autre appareil électronique, n'est pas autorisée. Les exercices sont indépendants.

1. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 18 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.
c. Déduire de la décomposition trouvée que ϕ est diagonalisable.
d. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

2. On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence $a_{n+2} = 6a_n + a_{n+1}$ et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.
a. Calculer les 7 premiers termes de cette suite.
b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrit

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

c. Trouver un polynôme dont les valeurs propres de A sont des racines.
d. Trouver les valeurs propres de A, et une base de vecteurs propres.
e. En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite.

3. Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathbf{R}_{<3}[X]$ des polynômes en X de degré inférieur à 3, on considère les 4 vecteurs (c'est-à-dire polynômes) $Q = 2 + 2X + X^2$, $R = 1 + 2X - 2X^2$, $S = -4 - 6X + 3X^2$, et $T = 5 + 6X$. On définit l'application $f : \mathbf{R}^4 \to E$ donnée par $f((a, b, c, d)) = aQ + bR + cS + dT$, qui est linéaire (une application définie ainsi par la formation de combinaisons linéaires l'est toujours).
a. Donner la matrice ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$, où $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B} = [1, X, X^2]$ est la base canonique de E.
b. Déterminer une base du noyau $\ker(f) \subseteq \mathbf{R}^4$ de f.
c. Est-ce que f est surjectif?
d. Déterminer une base de l'image $\mathrm{Im}(f) \subseteq E$ de f.

Fin.