Examen Algèbre Linéaire 2 mardi 13 juin 2017
9h–12h

Le cours écrit, son résumé, et vos notes personnelles sont autorisés. L'utilisation d'une calculette ou de tout autre appareil électronique est interdite. Tous les résultats du cours ou vus en TD peuvent être utilisés dans vos réponses ; pensez à les mentionner clairement. Les quatre parties sont indépendantes.

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 8 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.
c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.
d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

2. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<3}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré moins de 3, et $\mathcal{E} = [1, X, X^2]$ la base canonique de cet espace. On considère l'application linéaire $f : E \to E$ donnée par $f(c_0+c_1X+c_2X^2) = (3c_0-c_1+c_2)+(8c_0-3c_1+2c_2)X+(7c_0-4c_1+3c_2)X^2$ $(c_0, c_1, c_2 \in \mathbf{R})$.
a. Donner la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{E}$.
b. Montrer pour tout polynôme $P \in E$, que sa valeur $P[-1]$ en $X = -1$ et la valeur correspondante $f(P)[-1]$ pour le polynôme $f(P)$ vérifient $f(P)[-1] = 2P[-1]$.
c. Soit $V = \{\, P \in E \mid P[-1] = 0 \,\}$ le sous-espace de E des polynômes s'annulant en $X = -1$. Montrer que V est f-stable, c'est-à-dire que $f(V) \subseteq V$.
d. Donner une base $\mathcal{B}$ du sous-espace V.
e. Par restriction, f définit un endomorphisme du sous-espace V, qu'on désignera par $f|_V$ (donc $f|_V : V \to V$ vérifie $f|_V(v) = f(v)$ pour $v \in V$). Donner le polynôme caractéristique de $f|_V$ (il est de degré $\dim V = 2$) et conclure que cette restriction $f|_V$ est diagonalisable.
f. Montrer que f n'admet aucun vecteur propre en dehors du sous-espace V [indication : on pourra déduire de la question *b* ce le seul candidat pour la valeur propre correspondante est $\lambda = 2$] et conclure que f n'est pas diagonalisable.

3. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Si $[e_1, e_2, e_3, e_4]$ désigne la base canonique de $\mathbf{C}^4$, dire pour chacun des sous-espaces $V_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $V_2 = \mathrm{Vect}(e_3)$, et $V_3 = \mathrm{Vect}(e_4)$ s'il s'agit ou non d'un sous-espace ϕ-stable.
b. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ et constater, en le factorisant, que χ_ϕ a une racine triple, qu'on appellera λ, ainsi qu'une racine simple ν.
c. Déterminer l'espace propre E_λ pour la racine triple. Est-ce que ϕ est diagonalisable ?
d. Calculer $(M-\lambda I)^2$, et déduire du rang de cette matrice la valeur du polynôme minimal μ_ϕ.
e. Décrire explicitement les sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de ϕ ; ils figurent dans une décomposition $\mathbf{C}^4 = \widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu$.
f. Trouver une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation, et détailler la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

 sujet continué au verso

4. Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé avec n racines simples, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tous distincts. On appelle "racine cubique de A" toute matrice $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $B^3 = A$.

a. Montrer que toute matrice réelle *diagonale* admet au moins une racine cubique.

b. En déduire que A possède au moins une racine cubique.

c. Pourquoi une racine cubique B de A doit-elle commuter avec A (vérifier $AB = BA$) ?

d. Si $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ vérifie $AC = CA$, montrer que chaque sous-espace propre E_{λ_i} de A est C-stable (plus précisément il est stable par l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ donné par $v \mapsto C \cdot v$).

e. En déduire que dans ce cas chaque vecteur propre pour A est aussi vecteur propre pour C (pas forcément pour la même valeur propre), et que C est diagonalisable.

f. Si B est une racine cubique de A, le résultat de la question précédente s'applique pour $C = B$ (d'après la question *c*). Si dans ce cas v est un vecteur propre pour A avec valeur propre λ, que peut-on dire de la valeur propre de v en tant que vecteur propre de B ?

g. En utilisant les questions précédentes, conclure que A possède une racine cubique unique, qu'on décrira.

 Fin.