**Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2** mardi 13 juin 2017
9h–12h

**1.** Soit $\phi$ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 8 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

*a.* Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X-6 & -8 & 4 \\ 0 & X+3 & 0 \\ -8 & -6 & X+6 \end{vmatrix}$$

*par développement par la seconde ligne donne* $(X+3)(\left|\begin{smallmatrix} X-6 & 4 \\ -8 & X+6 \end{smallmatrix}\right| = (X+3)(X^2-4)$ *ou explicitement* $\chi_A = X^3 + 3X^2 - 4X - 12$.

*b.* Décomposer $\chi_A$ dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ $\chi_A = (X+3)(X+2)(X-2)$

*c.* Argumenter que $\phi$ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour $\phi$.

$\surd$ *Les trois racines (rationnelles) de $\chi_A$ sont des valeurs propres de $\phi$, et pour chacune l'espace propre est de dimension au moins 1 (en fait exactement 1 car ces racines sont simples). La somme de ces espaces propres, toujours directe, est donc de dimension au moins $1+1+1=3$, d'où elle remplit l'espace $E$ qui est de dimension 3, et $\phi$ est diagonalisable.*
*Pour $\lambda = -3$, $\lambda = -2$ et $\lambda = 2$ on cherche les noyaux des matrices*

$$A + 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad A + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad A - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

*En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*montrant que chacune est de rang 2 (il y a une dépendance linéaire entre ses lignes) et que leurs noyaux contiennent respectivement les vecteurs $(0,1,2)$, $(1,0,2)$, et $(1,0,1)$, qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement $\lambda = -3$, pour $\lambda = -2$ et pour $\lambda = 2$.*

*d.* Exprimer $A^n$ en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *On choisit les trois vecteurs $(0,1,2)$, $(1,0,2)$, et $(1,0,1)$ comme base $\mathcal{B}$, pour lequel la matrice de passage $P$ de la base canonique vers $\mathcal{B}$ et son inverse sont*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

*et puisque $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres $-3, -2, 2$ on aura $A = PDP^{-1}$ pour la matrice diagonale $D$ de coefficients diagonaux $-3, -2, 2$. Alors $A^n = PD^nP^{-1}$ où $D^n$ est la matrice diagonale à coefficients diagonaux $(-3)^n, (-2)^n, 2^n$, ce qui donne*

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -b+2c & -2b+2c & b-c \\ 0 & a & 0 \\ -2b+2c & 2a-4b+2c & 2b-c \end{pmatrix}$$

*où $a = (-3)^n$, $b = (-2)^n$, $c = 2^n$.*

**2.** Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<3}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré moins de 3, et $\mathcal{E} = [1, X, X^2]$ la base canonique de cet espace. On considère l'application linéaire $f : E \to E$ donnée par $f(c_0+c_1X+c_2X^2) = (3c_0-c_1+c_2)+(8c_0-3c_1+2c_2)X+(7c_0-4c_1+3c_2)X^2$ $(c_0, c_1, c_2 \in \mathbf{R})$.

*a.* Donner la matrice de $f$ par rapport à la base $\mathcal{E}$.

$\surd$ *Les colonnes donnent les coefficients dans la base $\mathcal{E}$ de respectivement $f(1)$, $f(X)$, et $f(X^2)$, ce qui donne*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 8 & -3 & 2 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

*puisque $f(1) = 3 + 8X + 7X^2$, $f(X) = -1 - 3X - 4X^2$ et $f(X^2) = 1 + 2X + 3X^2$. (Aussi, lignes de la matrice décrivent les expressions pour les coefficients de $1, X, X^2$ dans $f(c_0 + c_1X + c_2X^2)$.)*

*b.* Montrer pour tout polynôme $P \in E$, que sa valeur $P[-1]$ en $X = -1$ et la valeur correspondante $f(P)[-1]$ pour le polynôme $f(P)$ vérifient $f(P)[-1] = 2P[-1]$.

$\surd$ *On posant $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$ on a $P[-1] = c_0 - c_1 + c_2$, pendant que $f(P)[1] = (3c_0 - c_1 + c_2) - (8c_0 - 3c_1 + 2c_2)X + (7c_0 - 4c_1 + 3c_2) = (3 - 8 + 7)c_0 + (-1 - -3 + -4)c_1 + (1 - 2 + 3)c_2 = 2c_0 - 2c_1 + 2c_2$, d'où l'égalité. (Le calcul fait ici revient à vérifier que $(1\ -1\ 1) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 2 \times (1\ -1\ 1)$.)*

*c.* Soit $V = \{ P \in E \mid P[-1] = 0 \}$ le sous-espace de $E$ des polynômes s'annulant en $X = -1$. Montrer que $V$ est $f$-stable, c'est-à-dire que $f(V) \subseteq V$.

$\surd$ *Pour $P \in V$ on a $0 = 2P[-1] = f(P)[-1]$ d'après la question précédente, donc $f[P] \in V$.*

*d.* Donner une base $\mathcal{B}$ du sous-espace $V$.

$\surd$ *Pour $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$ la condition $P[-1] = 0$ donne $c_0 - c_1 + c_2$. Une base de l'espace de solutions de ce «système d'une équation en 3 inconnues» est formée de la solution avec $(c_0, c_1, c_2) = (1, 1, 0)$ et celle avec $(c_0, c_1, c_2) = (1, 0, -1)$, c'est-à-dire on eut prendre $\mathcal{B} = [1 + X,\ 1 - X^2]$ (ce n'est qu'un exemple d'une base parmi une infinité de possibilités).*

*e.* Par restriction, $f$ définit un endomorphisme du sous-espace $V$, qu'on désignera par $f|_V$ (donc $f|_V : V \to V$ vérifie $f|_V(v) = f(v)$ pour $v \in V$). Donner le polynôme caractéristique de $f|_V$ (il est de degré $\dim V = 2$) et conclure que cette restriction $f|_V$ est diagonalisable.

$\surd$ *Sur la base de $V$ de la question précédente, la matrice de $f|_V$ est donnée par $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ car $f(1 + X) = 2 + 5X + 3X^2 = 5(1 + X) - 3(1 - X^2)$ et $f(1 - X^2) = 2 + 6X + 4X^2 = 6(1 + X) - 4(1 - X^2)$, et son polynôme caractéristique est $X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$. Les 2 racines distinctes $2, -1$ montrent que $f|_V$ est diagonalisable. (Ce n'était pas demandé, mais les sous-espaces propres de $V$ sont $E_2 = \mathrm{Vect}(1 + 2X + X^2)$ et $E_{-1} = \mathrm{Vect}(X - X^2)$.)*

*f.* Montrer que $f$ n'admet aucun vecteur propre en dehors du sous-espace $V$ [indication : on pourra déduire de la question $b$ ce le seul candidat pour la valeur propre correspondante est $\lambda = 2$] et conclure que $f$ n'est pas diagonalisable.

$\surd$ *Si $P$ était vecteur propre de $f$ avec $P[-1] \neq 0$, disons pour valeur propre $\lambda$, on aurait $2P[-1] = f(P)[-1] = \lambda P[-1]$, donc (puisque $P[-1] \neq 0$) $\lambda = 2$. Or $\ker(f + 2I)$ se calcule à l'aide de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ci-dessus. Il est de dimension 1, avec générateur $P = 1 + 2X + X^2$, pour lequel $P \in V$. Par conséquent la somme directe des sous-espace propres est contenue dans $V$ (en fait c'est $V$), et elle ne remplit pas $E$ ; cela veut dire que $f$ n'est pas diagonalisable.*

**3.** On considère l'endomorphisme $\phi$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*a.* Si $[e_1, e_2, e_3, e_4]$ désigne la base canonique de $\mathbf{C}^4$, dire pour chacun des sous-espaces $V_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $V_2 = \mathrm{Vect}(e_3)$, et $V_3 = \mathrm{Vect}(e_4)$ s'il s'agit ou non d'un sous-espace $\phi$-stable.

$\surd$ *$V_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est $\phi$-stable car $\phi(e_1) = -e_1 + e_2 \in V_1$ et $\phi(e_1) = -9e_1 + 5e_2 \in V_1$. $V_2 = \mathrm{Vect}(e_3)$ n'est pas $\phi$-stable car $\phi(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 \notin V_2$. $V_3 = \mathrm{Vect}(e_4)$ est $\phi$-stable car $\phi(e_4) = -e_4 \in V_3$*

*b.* Calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ et constater, en le factorisant, que $\chi_\phi$ a une racine triple, qu'on appellera $\lambda$, ainsi qu'une racine simple $\nu$.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ se calcule en développant $\det(XI - M)$ par sa dernière colonne, et le déterminant $3 \times 3$ qui en résulte encore par sa dernière colonne, comme $\chi_\phi = \left|\left(\begin{smallmatrix} X+1 & 9 \\ -1 & X-5 \end{smallmatrix}\right)\right|(X-2)(X+1)$, soit $(X^2 - 4X + 4)(X-2)(X+1) = (X-2)^3(X+1)$. Il a $\lambda = 2$ comme racine triple et $\nu = -1$ comme racine simple.*

*c.* Déterminer l'espace propre $E_\lambda$ pour la racine triple. Est-ce que $\phi$ est diagonalisable ?

$\surd$ *On a $E_\lambda = \ker(M - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (après réduction par la méthode de Gauss), sous-espace qui est engendré par le vecteur $(3, -1, 0, 0)$. Comme il est de dimension $1 < 3$ (la multiplicité de $\lambda = 2$ comme racine de $\chi_M$), $\phi$ n'est pas diagonalisable.*

*d.* Calculer $(M - \lambda I)^2$, et déduire du rang de cette matrice la valeur du polynôme minimal $\mu_\phi$.

$\surd$ *On a*

$$(M - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

*qui est de rang 2, donc son noyau est de dimension $4 - 2 = 2$, trop peu pour être $\widetilde{E}_\lambda = \widetilde{E}_{-2}$, qui est de dimension 3. Le polynôme minimal $\mu_\phi$ contient donc 3 facteurs $X - 2$ et est égal au polynôme caractéristique $\chi_\phi = (X-2)^3(X+1) = X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 8$.*

*e.* Décrire explicitement les sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de $\phi$ ; ils figurent dans une décomposition $\mathbf{C}^4 = \widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu$.

$\surd$ *On a $\widetilde{E}_\lambda = \ker((M - 2I)^3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et puisque $e_4$ est clairement vecteur propre pour $\nu = -1$ on a $\widetilde{E}_\nu = \mathrm{Vect}(e_4)$.*

*f.* Trouver une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation, et détailler la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

$\surd$ *Il convient de commencer la base de $\widetilde{E}_2$ avec une base du sous-espace propre $E_2$, donc on pose $b_1 = (3, -1, 0, 0)$, le générateur de $E_2$ trouvé dans la question c. Puis on prend pour $b_2$ un vecteur indépendant de $\ker((M - 2\mathbf{I})^2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, par exemple $b_2 = e_1$. On prend pour $b_3$ n'importe quel vecteur indépendant de $\widetilde{E}_2$, par exemple $b_3 = e_3$, et finalement pour $\nu = -1$ on prend $b_4 = e_4$ un générateur de $\widetilde{E}_\nu = E_\nu = \mathrm{Vect}(e_4)$. Pour ce choix $\mathcal{B} = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ on a, puisque $\phi(b_1) = 2b_1$, $\phi(b_2) = -e_1 + e_2 = -b_1 + 2b_2$, $\phi(b_3) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 = -2e_1 + 9b_2 + 2b_3$ et $\phi(b_4) = -b4$, que*

$$\mathrm{Mat}_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**4.** Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique $\chi_A$ est scindé avec $n$ racines simples, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tous distincts. On appelle "racine cubique de $A$" toute matrice $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $B^3 = A$.

*a.* Montrer que toute matrice réelle *diagonale* admet au moins une racine cubique.

$\surd$ *Puisque la multiplication de matrices diagonales revient à multiplier pour chaque position diagonale séparément les coefficients, il suffit pour trouver une racine cubique d'un matrice diagonale avec coefficients diagonaux $c_1, \dots, c_n$ de prendre une matrice diagonale avec coefficients diagonaux $\sqrt[3]{c_1}, \dots, \sqrt[3]{c_n}$, ce qui est toujours possible.*

*b.* En déduire que $A$ possède au moins une racine cubique.

$\surd$ *Si $P$ est la matrice de passage vers une base de diagonalisation on a $A = PDP^{-1}$ où $D$ est une matrice diagonale avec coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. D'après le point précédent $D$ possède une racine cubique $R$, et alors $B = PRP^{-1}$ est une racine cubique de $A$.*

*c.* Pourquoi une racine cubique $B$ de $A$ doit-elle commuter avec $A$ (vérifier $AB = BA$) ?

$\surd$ *Simplement car $AB = B^3B = B^4 = BB^3 = BA$ (associativité du produit matriciel).*

*d.* Si $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ vérifie $AC = CA$, montrer que chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}$ de $A$ est $C$-stable (plus précisément il est stable par l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ donné par $v \mapsto C \cdot v$).

$\surd$ *Il a été montré dans les TD que pour deux endomorphismes qui commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables pour l'autre, ce (la part pour le noyau) qu'on peut appliquer ici pour $A - \lambda_i I$ pour l'un et $C$ pour l'autre. Ou on peut raisonner directement : soit $v \in E_{\lambda_i}$, c'est-à-dire $A \cdot v = \lambda_i v$. Alors $A \cdot C \cdot v = C \cdot A \cdot v = C \cdot \lambda_i v = \lambda_i (C \cdot v)$, donc $C \cdot v \in E_{\lambda_i}$, ce qui montre que $E_{\lambda_i}$ est $C$-stable.*

*e.* En déduire que dans ce cas chaque vecteur propre pour $A$ est aussi vecteur propre pour $C$ (pas forcément pour la même valeur propre), et que $C$ est diagonalisable.

$\surd$ *Ici pour chaque $i$ on a $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$ (car cette dimension est au moins 1 et au plus la multiplicité de $\lambda_i$ comme racine de $\chi_A$) et donc $E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}(v)$ pour tout vecteur (propre de $A$) $v \neq 0$ choisi dans $E_{\lambda_i}$. Le fait que $\mathrm{Vect}(v)$ est $C$-stable veut dire que $v$ est (aussi) vecteur propre pour $C$ (définition 2.2.1). Une base de vecteurs propres de $A$ (qui existe) sera donc aussi base de vecteurs propres de $C$, et $C$ est donc diagonalisable.*

*f.* Si $B$ est une racine cubique de $A$, le résultat de la question précédente s'applique pour $C = B$ (d'après la question *c*). Si dans ce cas $v$ est un vecteur propre pour $A$ avec valeur propre $\lambda$, que peut-on dire de la valeur propre de $v$ en tant que vecteur propre de $B$ ?

$\surd$ *La valeur propre $\mu$ de $v$ en tant que vecteur propre de $B$ doit vérifier $\mu^3 = \lambda$, car on a $\lambda v = A \cdot v = B^3 \cdot v = \mu^3 v$ pendant que $v \neq 0$. Autrement dit $\mu = \sqrt[3]{\lambda}$ (la fonction "racine cubique" $x \mapsto \sqrt[3]{x}$) est bien définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.*

*g.* En utilisant les questions précédentes, conclure que $A$ possède une racine cubique unique, qu'on décrira.

$\surd$ *Si l'on choisit une base de diagonalisation de $A$, toute racine cubique $B$ de $A$ doit d'après les questions c,e,f être diagonalisable avec la même base de diagonalisation, et avec pour valeurs propres associées les racines cubiques de leurs valeurs propres pour $A$, ce qui détermine complètement $B$. Autrement dit, la racine cubique indiquée dans la question b est bien la seul racine cubique (réelle) de la matrice $A$.*



**Fin.**