Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2 mardi 3 janvier 2017
14h–17h

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X-4 & -7 & 1 \\ 1 & X+4 & -3 \\ 1 & 1 & X \end{vmatrix}$$

est un peu fastidieux mais possible, et donne $X^3 + X^2(-4+4+0) + X(\left|\begin{smallmatrix} -4 & -7 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right|) - \det A = X^3 + X(-9-1+3) - -6 = X^3 - 7X + 6$. *C'est un peu plus simple si l'on soustrait la dernière ligne à la seconds, puis ajoute la second colonne à la dernière, donnant*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & -7 & 1 \\ 0 & X+3 & -3-X \\ 1 & 1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-4 & -7 & -6 \\ 0 & X+3 & 0 \\ 1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} = (X+3)(X^2-3X+2).$$

(ce qui après multiplication donne bien sur aussi $\chi_A = X^3 - 7X + 6$*).*

b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ *Les racines rationnelles sont diviseurs du coefficient constant* 6 *de* χ_A*. Effectivement* 1, 2 *et* -3 *sont de telles racines, et on a la décomposition* $X^3 - 7X + 6 = (X+3)(X-1)(X-2)$.

c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Les trois racines (rationnelles) de* χ_A *sont des valeurs propres de* ϕ*, et pour chacune l'espace propre est de dimension au moins* 1 *(en fait exactement* 1 *car ces racines sont simples). La somme de ces espaces propres, toujours directe, est donc de dimension au moins* $1+1+1 = 3$*, d'où elle remplit l'espace* E *qui est de dimension* 3*, et* ϕ *est diagonalisable.*
Pour $\lambda = -3$, $\lambda = 1$ *et* $\lambda = 2$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$A + 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -1 & -6 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

montrant que chacune est de rang 2 *(il y a une dépendance linéaire entre ses lignes) et que leurs noyaux contiennent respectivement les vecteurs* $(-1,1,0)$, $(-2,1,1)$, *et* $(-3,1,1)$, *qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda = -3$, *pour* $\lambda = 1$ *et pour* $\lambda = 2$.

d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

$\checkmark$ *On choisit les trois vecteurs $(-1,1,0)$, $(-2,1,1)$, et $(-3,1,1)$ comme base $\mathcal{B}$, pour lequel la matrice de passage P de la base canonique vers $\mathcal{B}$ et son inverse sont*

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et puisque $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres $-3,1,2$ on aura $A = PDP^{-1}$ pour la matrice diagonale D de coefficients diagonaux $-3,1,2$. Alors $A^n = PD^nP^{-1}$ où D^n est la matrice diagonale à coefficients diagonaux $(-3)^n, 1^n, 2^n$, ce qui donne

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2b+3c & -a-2b+3c & a-4b+3c \\ b-c & a+b-c & -a+2b-c \\ b-c & b-c & 2b-c \end{pmatrix}$$

où $a = (-3)^n$, $b = 1^n = 1$, $c = 2^n$.

2. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On définit un sous-espace V comme l'image de $\phi^2 + I$.

a. Argumenter sans calcul que V est un sous-espace ϕ-stable.

$\checkmark$ *C'est l'image d'un polynôme en ϕ, et en tant que tel automatiquement ϕ-stable. (Plus généralement, l'image d'un endomorphisme qui commute avec ϕ est toujours ϕ-stable.)*

b. Déterminer une base de V.

$\checkmark$ *On calcule d'abord*

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 5 & -10 & 10 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad B^2 + I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

dont l'image demandée est engendrée par les colonnes. C'est un sous-espace de dimension 2, avec comme base par exemple $\mathcal{B} = [b_1, b_2]$ avec $b_1 = (1,0,0,1)$ et $b_2 = (0,0,1,2)$.

c. Trouver la matrice par rapport à cette base de la restriction $\phi|_V$.

$\checkmark$ *Il s'agit d'exprimer $B \cdot b_1$ et $B \cdot b_2$ en termes de b_1 et b_2. Or $B\cdot = (1,0,0,1) = (-2,0,0,-2) = -2b_1$ et $B \cdot (0,0,1,2) = (-4,0,2,0) = -4b_1 + 2b_2$. Cela donne $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi|_V) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.*

d. Montrer que $\phi|_V$ est diagonalisable.

$\checkmark$ *On calcule à partir de cette matrice que $\chi_{\phi|_V} = X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$, et ce polynôme étant scindé et à racines simples dans $\mathbf{R}$, on conclut que $\phi|_V$ est diagonalisable (avec valeurs propres -2 et 2).*

e. Montrer que $\mathbf{R}^4 = V \oplus \ker(\phi^2 + I)$.

$\surd$ *Puisque X^2-4 est polynôme annulateur de $\phi|_V$ (par le théorème de Cayley-Hamilton, ou par une simple calcul direct), le polynôme $(X^2-4)(X^2+1)$ est polynôme annulateur de ϕ. On a aussi $\operatorname{pgcd}(X^2-4, X^2+1) = 1$, donc on peut appliquer le théorème de décomposition des noyaux, qui dit $\mathbf{R}^4 = \ker(\phi^2-4I) \oplus \ker(\phi^2+I)$. Alors $\dim\ker(\phi^2-4I) = 4 - \dim\ker(\phi^2+I) = \dim\operatorname{Im}(\phi^2+I) = \dim(V)$ (on a utilisé le théorème du rang), mais aussi $V \subseteq \ker(\phi^2-4I)$, donc $V = \ker(\phi^2-4I)$ et $\mathbf{R}^4 = \ker(\phi^2-4I) \oplus \ker(\phi^2+I)$ devient $\mathbf{R}^4 = V \oplus \ker(\phi^2+I)$.*

f. Montrer que ϕ n'est pas diagonalisable.

$\surd$ *On a $\dim\ker(\phi^2+I) = 2 \neq 0$, et X^2+1 étant un polynôme annulateur de la restriction de ϕ à ce noyau et sans racine réelle, cette restriction n'est pas diagonalisable. Mais dans ce cas ϕ ne peut pas être diagonalisable non plus (on a vu aux TD que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable ϕ à un sous-espace ϕ-stable est automatiquement diagonalisable, par exemple parce qu'elle est annulé par le polynôme minimal de ϕ qui est scindé et à racines simples).*

3. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Pourquoi ϕ définit-il, par restriction au sous-espace $V = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique, un endomorphisme $\phi|_V$ de V ?

$\surd$ *Parce que V est ϕ-stable. Et cela est le cas parce que les deux premières colonnes de M (qui donnent $\phi(e_1)$ et $\phi(e_2)$, et qui engendrent $\phi(V)$) ont des coefficients nuls au delà de la seconde ligne, c'est-à-dire ces colonnes sont dans $\operatorname{Vect}(e_1, e_2) = V$.*

b. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_{\phi|_V}$ de cette restriction.

$\surd$ *La matrice de $\phi|_V$ par rapport à la base $[e_1, e_2]$ de V est $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, dont le polynôme caractéristique est X^2.*

c. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ (c'est un multiple de $\chi_{\phi|_V}$), et constater, en le factorisant, que χ_ϕ a une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple ν.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ est le produit de $\chi_{\phi|_V}$ et celui de l'autre bloc diagonal $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, soit $X^2 - 3X$, donc $\chi_\phi = X^2(X^2 - 3X) = X^3(X-3)$. Il a $\lambda = 3$ comme racine simple et $\nu = 0$ comme racine triple.*

d. Déterminer l'espace propre E_ν pour la racine triple. Est-ce que ϕ est diagonalisable ?

$\surd$ *On a $E_\nu = \ker(M - 0I) = \ker(M) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (après réduction par la méthode de Gauss), sous-espace qui est engendré par les vecteurs $(2, -1, 0, 0)$ et $(3, 0, -1, 2)$. Comme il est de dimension $2 < 3$ (la multiplicité de $\nu = 0$ comme racine de χ_M), ϕ n'est pas diagonalisable.*

e. Calculer $(M - \nu I)^2$, et déduire du rang de cette matrice la valeur du polynôme minimal μ_ϕ.

$\surd$ *On a*

$$(M - \nu I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 28 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1, donc son noyau est de dimension $4 - 1 = 3$, c'est $\widetilde{E}_\nu = \widetilde{E}_0$. Puisque X^2 annule $\phi|_{\widetilde{E}_0}$, et $X - 3$ annule $\phi|_{\widetilde{E}_3}$, le polynôme minimal est $\mu_M = X^2(X-3)$.

f. Décrire explicitement les sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de ϕ ; ils figurent dans une décomposition $\mathbf{C}^4 = \widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu$.

$\surd$ *On a $\widetilde{E}_\lambda = E - \lambda = \ker(M - 3I) = \mathrm{Vect}(b_1)$ où $b_1 = (-14, 1, -6, 3)$. D'après la question précédente $\widetilde{E}_\nu = \ker(M^2) = \ker\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\big(e_1, e_2, (0,0,1,-2)\big)$.*

g. Trouver une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation, et détailler la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

$\surd$ *Il convient de commencer la base de $\widetilde{E}_0$ avec une base du sous-espace propre E_0, donc on pose $b_2 = (2, -1, 0, 0)$ et $b_3 = (3, 0, -1, 2)$, et compléter avec n'importe quel vecteur indépendant de $\widetilde{E}_0$, par exemple $b_4 = e_1$. Pour ce choix $\mathcal{B} = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ on a, puisque $\phi(b_1) = 3b_1$, $\phi(b_2) = 0 = \phi(b_3)$ et $\phi(b_4) = (2, -1, 0, 0) = b_2$, que*

$$\mathrm{Mat}_B(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ une matrice pour dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé avec n racines simples, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tous distincts. On appelle "racine carrée de A" toute matrice $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $B^2 = A$.

a. Montrer que toute matrice réelle diagonale à coefficients positifs admet une racine carrée.

$\surd$ *Puisque la multiplication de matrices diagonales revient à multiplier pour chaque position diagonale séparément les coefficients, il suffit pour trouver une racine carrée d'un matrice diagonale avec coefficients diagonaux $c_1, \dots, c_n$ de prendre une matrice diagonale avec coefficients diagonaux $\sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_n}$. Ceci est possible (dans $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$) si $c_i \geq 0$ pour tout i.*

b. En déduire que si tous les λ_i sont positifs, alors A possède au moins une racine carrée.

$\surd$ *Si P est la matrice de passage vers une base de diagonalisation on a $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale avec coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. D'après le point précédent D possède une racine carrée R, et alors $B = PRP^{-1}$ est une racine carrée de A.*

c. Pourquoi une racine carrée B de A doit-elle commuter avec A (vérifier $AB = BA$) ?

$\surd$ *Simplement car $AB = B^2B = B^3 = BB^2 = BA$ (associativité du produit matriciel).*

d. Si $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ vérifie $AC = CA$, montrer que chaque sous-espace propre E_{λ_i} de A est C-stable (plus précisément il est stable par l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ donné par $v \mapsto C \cdot v$).

$\surd$ *Il a été montré dans les TD que pour deux endomorphismes qui commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables pour l'autre, ce (la part pour le noyau) qu'on peut appliquer ici pour $A - \lambda_i I$ pour l'un et C pour l'autre. Ou on peut raisonner directement : soit $v \in E_{\lambda_i}$, c'est-à-dire $A \cdot v = \lambda_i v$. Alors $A \cdot C \cdot v = C \cdot A \cdot v = C \cdot \lambda_i v = \lambda_i (C \cdot v)$, donc $C \cdot v \in E_{\lambda_i}$, ce qui montre que E_{λ_i} est C-stable.*

e. En déduire que dans ce cas chaque vecteur propre pour A est aussi vecteur propre pour C (pas forcément pour la même valeur propre), et que C est diagonalisable.

$\surd$ *Ici pour chaque i on a $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$ (car cette dimension est au moins 1 et au plus la multiplicité de λ_i comme racine de χ_A) et donc $E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}(v)$ pour tout vecteur (propre de A) $v \neq 0$ choisi dans E_{λ_i}. Le fait que $\mathrm{Vect}(v)$ est C-stable veut dire que v est (aussi) vecteur propre pour C (définition 2.2.1). Une base de vecteurs propres de A (qui existe) sera donc aussi base de vecteurs propres de C, et C est donc diagonalisable.*

f. Si B est une racine carrée de A, le résultat de la question précédente s'applique pour $C = B$ (d'après la question c). Si dans ce cas v est un vecteur propre pour A avec valeur propre λ, que peut-on dire de la valeur propre de v en tant que vecteur propre de B ?

$\surd$ *La valeur propre μ de v en tant que vecteur propre de B doit vérifier $\mu^2 = \lambda$, car on a $\lambda v = A \cdot v = B^2 \cdot v = \mu^2 v$ pendant que $v \neq 0$. Autrement dit $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$.*

g. En utilisant les questions précédentes, conclure que l'ensemble des racines carrées de A est toujours fini, que son nombre d'éléments est 0, 2^n ou 2^{n-1}, et déterminé par l'ensemble $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ d'une manière qu'on précisera.

$\surd$ *D'après ce qui précède, une racine carrée B de A est une matrice qui stabilise chaque espace propre E_{λ_i} et y agit par multiplication par un scalaire (réel) μ_i vérifiant $\mu_i^2 = \lambda_i$ (comme l'espace se décompose en somme directe des ces sous-espaces, de tels scalaires déterminent B de façon unique). Si $\lambda_i < 0$ pour au moins un i, un tel μ_i n'existe pas, et l'ensemble des racines carrées de A est vide. Si par contre $\lambda_i \geq 0$ pour tout i on a deux choix $(\pm\sqrt{\lambda_i})$ pour μ_i quand $\lambda_i > 0$, et un seul choix $(\mu_i = 0)$ si $\lambda_i = 0$. Comme les λ_i sont distincts, au plus un d'eux est zéro ; si cela arrive il y a 2^{n-1} racines carrées de A, sinon il y en a 2^n.*

Fin.