Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 jeudi 6 octobre 2016
9h–10h

1. Dans l'espace vectoriel $E = K[X]_{<4}$ des polynômes en X de degré plus petit que 4, on considère le sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}(P, Q, R, S)$ où $P = 5 - 2X - 3X^2$, $Q = 1 + 2X - 2X^2 + 2X^3$, $R = -2 - 4X + 4X^2 - 4X^3$, et $S = 3 - 6X + X^2 - 4X^3$.

a. Déterminer si la famille $[P, Q, R, S]$ est liée ou libre.

$\surd$ *La faille est liée ; la relation $2Q + R = 0$ est facile à voir (sans être la seule).*

b. On définit l'application linéaire $f : K^4 \to E$ par $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1P + x_2Q + x_3R + x_4S$. Écrire un système d'équations en x_1, x_2, x_3, x_4 qui décrit $\ker(f)$.

$\surd$ *En prenant les coefficients de X^0, X^1, X^2, X^3 respectivement, on obtient*

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c. Résoudre ce système pour trouver une base de $\ker(f)$.

$\surd$ *On peut réduire le système par exemple à*

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

On peut choisir x_3 et x_4 comme paramètres de la solution et on a des solutions particulières $x_3 = 1, x_4 = 0, x_2 = 2, x_1 = 0$ c'est-à-dire le vecteur $b_1(0, 2, 1, 0) \in \ker(f)$ ainsi que $x_3 = 0, x_4 = 1, 2_2 = 2, x_1 = -1$ c'est-à-dire le vecteur $b_2 = (-1, 2, 0, 1) \in \ker(f)$; $[b_1, b_2]$ est une base de $\ker(f)$.

d. Donner une famille extraite de $[P, Q, R, S]$ qui soit une base du sous-espace V.

$\surd$ *Les solutions de la question précédente donne les relations $2Q + R = 0$ et $-P + 2Q + S = 0$. Elles permettent d'exprimer $R = -2Q$ et $S = P - 2Q$ ce qui montre que R et S sont redondantes ; on peut extraire de la famille $[P, Q, R, S]$ la base $[P, Q]$ de V.*

2. Dans un espace vectoriel E de dimension finie sont donné deux bases $\mathcal{E}, \mathcal{B}$, et le fait que la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Combien de vecteurs possède chacune de ces deux bases ?

$\surd$ *Les colonnes expriment les coordonnées d'une base par rapport à l'autre base, donc visiblement les deux bases ont 3 vecteurs chacune.*

b. Déterminer la matrice de passage dans le sens opposé, c'est-à-dire de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{E}$.

$\surd$ *Cette matrice est P^{-1}. Par la méthode montrée en TD (ou par une autre méthode) on trouve*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -3 & 8 \\ 4 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Dans K^4 on considère les sous-espaces vectoriels $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $W = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$, avec $v_1 = (2, 1, 0, 4)$, $v_2 = (0, -1, 3, 2)$, $v_3 = (0, 3, 2, 5)$, et $w_1 = (1, 0, 1, 0)$, $w_2 = (0, 3, -1, 1)$.

a. Montrer que $\dim(V) = 3$ et $\dim(W) = 2$.

$\surd$ *Il suffit de constater que les familles $[v_1, v_2, v_3]$ et $[w_1, w_2]$ sont libres. C'est assez simple pour $[w_1, w_2]$, car les deux vecteurs ne sont pas proportionnels. D'autre part la famille $[v_1, v_2, v_3]$ est presque échelonnée : il suffit de remplacer v_3 par $v_3' = v_3 + 3v_2 = (0, 0, 11, 11)$ pour trouver un famille $[v_1, v_2, v_3']$ qui est échelonnée, et donc libre.*

b. Trouver une base du sous-espace $V \cap W$.

$\surd$ *Pour la méthode directe, on considère l'équation $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = x_4w_1 + x_5w_2$ aux inconnues $x_1, \ldots, x_5$, qui donne lieu au système homogène de matrice*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La solution de ce système à un générateur, qu'on peut choisir avec $x_4 = 2$ et donc $x_5 = -5$; les autres inconnues peuvent être déterminés, mais sont inutiles pour le calcul du vecteur générateur de l'intersection $x_4w_1 + x_5w_2 = (2, -15, 7, -5)$, (donc la base est à un seul vecteur, pour lequel on peut prendre $(2, -15, 7, -5)$).

La méthode indirecte qui consiste à trouver une équation pour V (le "plus grand" des deux sous-espaces) est plus rapide. Comme $\dim(V) = 3 = \dim(E) - 1$, une seule équation suffit, qui prend la forme $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$, et dans la forme échelonnée $[v1, v_2, v_3']$ on voit facilement que $(a, b, c, d) = (3, 2, 2, -2)$ convient (les 3 vecteurs générateurs de V vérifient tous l'équation $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$). Ensuite l'équation $(3\ 2\ 2\ -2)(xw_1 + yw_2)$ devient $5x + 2y = 0$, avec générateur des solutions par exemple $(x = 2, y = -5)$, pour quelle solution on obtient le générateur $xw_1 + yw_2 = (2, -15, 7, -5)$, comme dans l'approche directe.

c. Est-ce que la somme $V + W$ est une somme directe ?

$\surd$ *Non la somme n'est pas directe. On peut déduire cela de la question précédente (l'intersection n'est pas de dimension 0), mais on peut déjà le savoir à partir de la première question, car une somme directe aurait dimension $3 + 2 = 5$, ce qui est impossible dans K^5.*

Fin.