Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 mardi 6 octobre 2015
10h30–11h30

Consultation du cours écrit, et de vos notes personnelles, est autorisée.
Les espaces vectoriels sont sur un corps K, que vous pouvez supposer être un parmi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

1. On se place dans l'espace $E = K[X]_{<4}$ de polynômes en X de degré au plus 3. En notant $P[a]$ l'évaluation de $P \in E$ (qui est un polynôme) en $X = a$ (où $a \in K$ est un scalaire), et on définit le sous-espace $V = \{ P \in E \mid P[2] + 2P[-1] = 0 \}$ de E (on admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel). On considère les quatre vecteurs $P_1, \ldots, P_4 \in E$ suivants

$$\begin{aligned} P_1 &= \phantom{X^3 + X^2 + {}} 3X \\ P_2 &= \phantom{X^3 + {}} X^2 + X - 2 \\ P_3 &= X^3 + X^2 + X - 4 \\ P_4 &= X^3 - X^2 \end{aligned}$$

a. Montrer que $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4) \subseteq V$.

b. Montrer que $f : (c_1, c_2, c_3, c_4) \mapsto c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4$ définit une application linéaire $K^4 \to E$.

c. Donner une équation vectorielle avec 4 inconnues qui exprime qu'un polynôme $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$ est dans $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ (donc l'équation admet une solution si et seulement si $Q \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$; il s'agit juste d'expliciter la définition). Donner ensuite un système de 4 équations (scalaires) en ces 4 inconnues qui soit équivalent à cette équation vectorielle.

d. Donner une condition en termes de a, b, c, d pour que $Q \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ (c'est-à-dire pour que le système admette au moins une solution).

e. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = V$. [La question précédente est utile ici.]

f. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f.

g. Trouver une base de V.

2. Trouver une base du sous-espace de K^4 des vecteurs $(x_1, \ldots, x_4)$ qui vérifient le système d'équations linéaires homogènes suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \phantom{{} - x_4} = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Décrire le sous-espace de K^4 engendré par les vecteurs $(1, -1, -1, 0)$, $(0, 5, -2, 1)$ et $(1, -2, 1, 1)$ par un système d'équations, dans lequel les inconnues sont les coordonnées x, y, z, t d'un vecteur $(x, y, z, t) \in K^4$ (le nombre d'équations nécessaires est à déterminer, la possibilité de trouver un système à une seule équation, voire à aucune équation, n'étant pas exclue).

Fin.