Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 mercredi 1 octobre 2014
9h–10h

Les documents ne sont pas autorisés. Les espaces vectoriels sont tous sur un corps K, que vous pouvez supposer être un parmi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

1. Soient E, E' deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de respectivement E et E', $f : E \to E'$ une application linéaire, et $A = {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f par rapport à ces bases. Argumenter que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\ker(f) = \{0\}$;
(ii) les colonnes de A forment une famille libre dans K^n (où $n = \dim(E')$);
(iii) le rang $\mathrm{rg}(A)$ de A est égal au nombre $m = \dim E$ de colonnes de A.

2. Dans l'espace vectoriel K^n on considère deux sous-espaces V, W, avec respectivement des bases $[v_1, \ldots, v_k]$ et $[w_1, \ldots, w_l]$. Soit A la matrice $n \times k$ avec colonnes $v_1, \ldots, v_k$, soit B la matrice $n \times l$ avec colonnes $w_1, \ldots, w_l$, et $C = (A \mid B)$ la matrice $n \times (k + l)$ avec colonnes $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l$.

a. Montrer que pour tout vecteur $u \in V \cap W$ il existe $c_1, \ldots, c_k$ et $d_1, \ldots, d_l$, tous uniques, tels que

$$u = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_l \end{pmatrix}$$

et qu'alors le vecteur colonne x de coefficients $c_1, \ldots, c_k, -d_1, \ldots, -d_l$ vérifie $C \cdot x = 0$.

b. Si $L_C : K^{k+l} \to K^n$ est l'application linéaire de matrice C (par rapport aux bases canoniques), montrer que $\dim(V \cap W) = \dim(\ker(L_C))$.

c. En déduire la formule $\dim(V \cap W) + \dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$ [ce qui est $k + l$ ici].

3. Soit $f : K^2 \to K[X]_{<4}$ l'application linéaire vérifiant $f\binom{a}{b} = a(X^3 - X + 2) + b(X^3 + 2X^2 - 2X)$, et $gK[X]_{<4} \to K^2$ l'application linéaire vérifiant $g(P) = \binom{P(2)}{P(3)}$ (dont les coordonnées sont les évaluations du polynôme $P \in K[X]_{<4}$ respectivement en $X = 2$ et en $X = 3$).

a. Si $\mathcal{E}$ est la base canonique de K^2 et $\mathcal{B} = [1, X, X^2, X^3]$ la base naturelle (parfois aussi dite canonique) de $K[X]_{<4}$, donner les matrices $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ et $B = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

b. Calculer la matrice C de $g \circ f$ (par rapport à la base canonique).

c. Déterminer le sous-espace $V = \ker(g \circ f) \subseteq K^2$.

d. Argumenter que $f(V) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) \subseteq K[X]_{<4}$, et donner ensuite une base de $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$.

e. Déterminer $\dim(\mathrm{Im}(f) + \ker(g))$. [Il n'est pas demandé de trouver une base de $\mathrm{Im}(f) + \ker(g)$.]

Fin.