Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 mercredi 7 novembre 2012
9h30–11h30

Les documents ne sont pas autorisés.

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Donner les valeurs propres de f.

b. Donner une base $\mathcal{B} = [v_1, v_2]$ de $\mathbf{R}^2$ formée de vecteurs propres de f.

c. Donner une matrice P telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

d. Donner une expression de A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

2. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des suites infinies $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $x_n \in \mathbf{C}$ pour tout n, qui vérifient

$$x_{n+2} = x_{n+1} - x_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Une telle suite est déterminée par le couple (x_0, x_1) de ces deux premiers termes, et l'application $E \to \mathbf{C}^2$ qui associe à la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ le vecteur $\binom{x_0}{x_1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

a. Quelle est la dimension de E ?

b. Soit $S = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ une telle suite ; calculer un nombre suffisant de termes de la suite S (exprimés en écrivant $x = x_0$ et $y = x_1$) pour conclure qu'elle est *périodique*, c'est-à-dire : il existe un entier $p > 0$ tel que $x_{n+p} = x_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (on spécifiera la valeur de p).

c. Donner une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

d. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ est si $\binom{x_0}{x_1}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, exprimer le terme général x_n par une expression dans laquelle figurent seulement x_0, λ, et n.

e. Vérifier que cette matrice vérifie $A^3 = -\operatorname{Id} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. En déduire:

i. que A est inversible, et donner sa matrice inverse ;

ii. la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$ (on pourra distinguer plusieurs cas).

f. Trouver les valeurs propres de A, et les vecteurs propres pour chacune de ces valeurs propres.

g. En utilisant les résultats des questions *d* et *f*, donner une expression pour le terme général b_n de la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ pour laquelle $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$ (on évitera ici une distinction de cas).

h. Expliquer que cette expression est périodique en n (on le sait d'après la question *b*).

3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, muni d'un endomorphisme ϕ vérifiant $\phi^2 = \operatorname{Id}_E$.

a. Montrer que les seules valeurs propres λ que ϕ peut avoir sont $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.

b. On suppose que $v \in E$ est un vecteur non nul qui *n'est pas* un vecteur propre. Trouver, dans le sous-espace $\operatorname{Vect}(v, \phi(v))$, des vecteurs propres de ϕ aussi bien pour $\lambda = 1$ que pour $\lambda = -1$. [Écrire et résoudre une équation pour que $av + b\phi(v)$ avec $a, b \in \mathbf{Q}$ soit un tel vecteur propre.]

c. Conclure qu'un tel v est toujours une somme de deux vecteurs propres. Qu'est-ce qu'on peut alors dire de la somme $E_1 + E_{-1}$ des *espaces propres* E_λ de ϕ pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = -1$?

d. Conclure que ϕ est diagonalisable.

On spécialise maintenant $E = \mathbf{Q}[X]_{\leq 3}$, l'espace vectoriel des polynômes en X à coefficients rationnels et de degré au plus 3. On définit $f : E \to E$ en stipulant que $f(P)$ est obtenu à partir du polynôme P en remplaçant partout X par $(2-X)$ (une substitution qu'on peut décrire par $f : P(X) \mapsto P(2-X)$; on a par exemple $f(X^3 + 5X - 3) = (2-X)^3 + 5.(2-X) - 3 = -X^3 + 6X^2 - 17X + 15$).

e. Montrer que f est un endomorphisme de E, et qu'il vérifie $f^2 = \operatorname{Id}_E$.

f. Donner la matrice de f par rapport à la base $[1, X, X^2, X^3]$ de E.

g. Trouver les dimensions des espaces propres pour f, ainsi que la matrice de f par rapport à une base formée de vecteurs propres.

Fin.