Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2 mercredi 9 janvier 2013
14h–17h

1. Soit f l'endomorphisme du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathbf{R}^3$, dont la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -15 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique χ_A, et montrer que f est diagonalisable.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique se calcule facilement (grâce aux deux coefficients* 0*) : on obtient* $(X-3)\det\left(\begin{smallmatrix} X+6 & 15 \\ -4 & X-10 \end{smallmatrix}\right) = (X-3)(X^2-4X) = (X-3)X(X-4)$*, et les valeurs propres sont donc* 3, 0 *et* 4*. Comme le polynôme caractéristique est scindé à racines simples,* f *est certainement diagonalisable.*

b. Expliciter une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation et la forme diagonale $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sur cette base.

$\surd$ *Pour* $\lambda = 3$ *on voit tout de suite que* $(1,0,0)_{\mathcal{E}}$ *est un vecteur propre, et pour* $\lambda = 0$ *le vecteur propre (générateur de* $\mathrm{Ker}(f)$*) se trouve aussi presque par inspection:* $(2,-5,2)_{\mathcal{E}}$*. Il reste* $\lambda = 4$*, où on trouve après un court calcul* $(2,3,-2)_{\mathcal{E}} \in \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})$*. Donc une base de diagonalisation est* $\mathcal{B} = \big((1,0,0)_{\mathcal{E}}, (2,-5,2)_{\mathcal{E}}, (2,3,-2)_{\mathcal{E}}\big)$*, avec pour forme diagonale*

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c. Donner une expression explicite pour la puissance A^n de la matrice A, valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *Si* P *est la matrice de passage, dont les colonnes sont les vecteurs de la base* $\mathcal{B}$ *des vecteurs propres, on aura* $A^n = PD^nP^{-1}$*. La matrice de passage* P *de* $\mathcal{E}$ *vers* $\mathcal{B}$*, et son inverse* P^{-1} *sont :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix},$$

On trouve pour $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ *l'expression (sachant que* $0^n = 0$ *n'est vrai que si* $n > 0$*)*

$$\begin{pmatrix} 3^n & 2.3^n - 0^n - 4^n & 4.3^n - \frac{3}{2}0^n - \frac{5}{2}4^n \\ 0 & \frac{5}{2}0^n - \frac{3}{2}4^n & \frac{15}{4}0^n - \frac{15}{4}4^n \\ 0 & -0^n + 4^n & -\frac{3}{2}0^n + \frac{5}{2}4^n \end{pmatrix}.$$

Une vérification : substitution de $n = 0$ *et de* $n = 1$ *donne respectivement la matrice identité et* A*. Aussi pour* $n = 2$ *on trouve*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 0 & -24 & -60 \\ 0 & 16 & 40 \end{pmatrix},$$

ce qu'un calcul direct confirmera.

d. On cherche maintenant les endomorphismes g telles que $g^2 = f$. Montrer que pour un tel g, s'il existe, tout espace propre de f sera g-stable [montrer donc que si v est vecteur propre v de f pour λ, alors le vecteur $g(v)$ sera également dans cet espace propre : on aura $f(g(v)) = \lambda g(v)$].

$\surd$ *Si* v *est un vecteur propre de* $f = g^2$ *pour la valeur propre* λ*, on aura* $f(g(v)) = g^2(g(v)) = g^3(v) = g(g^2(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$*, donc* $g(v)$ *sera aussi dans l'espace propre de* f *pour* λ *(on n'exclut pas* $g(v) = 0$*, d'où cette formulation prudente). L'ingrédient essentiel dans ce raisonnement est la commutation* $f(g(v)) = g(f(v))$*, et en fait ce n'est qu'un cas particulier du fait général qui si* $f, g \in \mathrm{End}(E)$ *commutent, alors les espaces propres de* f *sont* g*-stables.*

e. En déduire que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ de g dans la base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres pour f doit être diagonale. Trouver ensuite toutes les possibilités pour cette matrice.

$\surd$ *Comme chaque espace propre de* f *est engendré par un seul vecteur* v_λ *de la base* $\mathcal{B}$*, et cet espace est* g*-stable, le vecteur* $g(v_\lambda)$ *qui est dans cet espace est un multiple de* v_λ*, donc* v_λ *est nécessairement aussi un vecteur propre de* g *(mais sa valeur propre n'est pas* λ *en général). Donc* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ *est diagonale, et la matrice de* $f = g^2$ *en est obtenue en enlevant les coefficients diagonaux au carré. En vue de la valeur donnée de* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$*, il existe quatre solutions pour* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$*, avec toutes les combinaisons de signes dans*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a. Donner la factorisation du polynôme caractéristique χ_ϕ dans $\mathbf{R}[X]$.

$\surd$ *On a* $\chi_\phi = (X-2)\det\left(\begin{smallmatrix} X+4 & 3 \\ -6 & X-5 \end{smallmatrix}\right) = (X-2)(X^2-X+2) = (X-2)^2(X+1)$.

b. Montrer que ϕ n'est pas diagonalisable.

$\surd$ *On voit que* χ_ϕ *est bien scindé, mais sa racine* 2 *est double. L'espace propre correspondant est* $\operatorname{Ker}((\phi - 2\operatorname{Id})^2)$, *et la matrice*

$$M - 2\operatorname{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

n'a pour noyau que l'espace de dimension 1 *engendré par* $(1,0,0)$, *et non pas un espace de dimension* 2 *(la multiplicité de la racine* $\lambda = 2$*). Cet espace propre étant de dimension insuffisante,* ϕ *n'est pas diagonalisable.*

c. Décrire les espaces caractéristiques de ϕ. [Rappel : l'espace caractéristique pour une valeur propre λ est égal au noyau de $(\phi - \lambda\operatorname{Id})^m$ où m est la multiplicité de λ comme racine de χ_ϕ.]

$\surd$ *L'espace propre, et caractéristique, pour la racine simple* $\lambda = -1$ *de* χ_ϕ *est de dimension* 1 *et engendré par* $(0,1,-1)$). *L'espace propre pour la racine double* $\lambda = 2$ *de* χ_ϕ *est le noyau de*

$$(M - 2\operatorname{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 9 \\ 0 & -18 & -9 \end{pmatrix}$$

qui est engendré par le vecteur propre $(1,0,0)$ *et un autre vectuer dans le noyau, comme* $(0,1,-2)$.

d. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ soit triangulaire supérieure, et expliciter cette matrice.

$\surd$ *On peut prendre la base des générateurs qu'on vient de nommer, car on a pris soin de prendre comme premier générateur de l'espace caractéristique pour* $\lambda = 2$ *le vecteur propre* $(1,0,0)$. *On trouve donc comme base*

$$\mathcal{B} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \qquad \text{pour laquelle on a} \qquad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. On considère la matrice triangulaire supérieure suivante, qui dépend de paramètres a, b, c, d, e, f:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & a & b & c \\ 0 & -3 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculer la factorisation du polynôme caractéristique χ_A dans $\mathbf{C}[X]$.

$\surd$ *On a visiblement* $\chi_A = (X+3)^2X^2$.

b. Si l'on suppose que A est diagonalisable (sur $\mathbf{C}$), quel sera alors son polynôme minimal μ_A ?

$\surd$ *Si* A *est diagonalisable, son polynôme minimal doit être scindé et à racines simple, et comme il doit aussi avoir les mêmes racines que* χ_A, *la seule possibilité est que* $\mu_A = (X+3)X = X^2 + 3X$.

c. Soit P le polynôme de la question précédente (candidat pour le polynôme minimal dans le cas où A serait diagonalisable). Calculer le polynôme en A correspondant, c'est-à-dire $P[X := A]$, et en déduire une condition nécessaire et suffisante en a, b, c, d, e, f pour que A soit diagonalisable.

$\surd$

$$(A + 3\,\mathrm{Id})A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 3 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & a & b & c \\ 0 & -3 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3a & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 3f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on en déduit que $a = f = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $(A + 3\,\mathrm{Id})A = 0$, et donc pour que A soit diagonalisable.

d. Trouver par la même méthode une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$B = \begin{pmatrix} -3 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\surd$ *Bien que $\chi_B = \chi_A$ et le candidat $P = (X + 3)X$ pour le polynôme minimal soit inchangé, on a*

$$(B + 3\,\mathrm{Id})B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 3 & d & e \\ 0 & 0 & 3 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf-3c \\ 0 & 0 & 3d & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $d = ae + bf - 3c = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $(B + 3\,\mathrm{Id})B = 0$, et donc pour que B soit diagonalisable.

4. Soient données un K-espace vectoriel E de dimension n, un endomorphisme $\phi \in \mathrm{End}(E)$ et un vecteur non nul $v_0 \in E$. On définit le vecteurs $v_i = \phi^i(v_0)$ pour $0 < i \leq n$.

a. Pourquoi la famille $(v_0, \ldots, v_n)$ est-elle certainement liée ?

$\surd$ *Il s'agit d'une famille de $n + 1$ vecteurs, plus nombreux que le dimension n de l'espace.*

Soit $d \leq n$ minimal tel que la famille $(v_0, \ldots, v_d)$ soit liée (ce qui est bien défini d'après la question précédente), et soit $F = \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_{d-1})$.

b. Montrer qu'il existe des coefficients $a_0, \ldots, a_{d-1} \in K$ tels que $a_0v_0 + a_1v_1 + \cdots + a_{d-1}v_{d-1} + v_d = 0$, et que ces coefficients sont uniques.

$\surd$ *Comme la famille $(v_0, \ldots, v_d)$ est liée, il existe des coefficients $c_0, \ldots, c_n \in K$, pas tous nuls, tels que $c_0v_0 + \cdots + c_nv_n = 0$. Or si on avait $c_n = 0$ alors les vecteurs $v_0, \ldots, v_{d-1}$ serait déjà linéairement dépendants, contredisant la minimalité de d. Donc $c_n \neq 0$, et en divisant par c_n on trouve que les coefficients $a_i = c_i/c_n$ pour $i = 0, \ldots, d-1$ vérifient $a_0v_0 + a_1v_1 + \cdots + a_{d-1}v_{d-1} + v_d = 0$. Si $a'_0, \ldots, a'_{d-1}$ est un autre d-uplet de coefficients avec cette propriété, on trouve par soustraction des relations $(a_0 - a'_0)v_0 + \cdots + (a_{d-1} - a'_{d-1})v_{d-1} = 0$ et donc $a'_i = a_i$ pour tout i car la famille $(v_0, \ldots, v_{d-1})$ est libre ; ceci établit l'unicité.*

c. Montrer que F est un sous-espace ϕ-stable de E, et le plus petit tel sous-espace qui contient v_0 (c'est-à-dire, tout sous-espace ϕ-stable de E qui contient v_0 contient forcément F tout entier).

$\surd$ *Si on applique ϕ aux vecteurs $v_0, \ldots, v_{d-1}$ qui engendrent F, on trouve $v_1, \ldots, v_d$. Tous ces images sont dans F, c'est évident pour $v_1, \ldots, v_{d-1}$ et $v_d = -a_0v_0 - \cdots - a_{d-1}v_{d-1}$ d'après la question précédente. Du coup $\phi(F) \subseteq F$ et F est ϕ-stable. Tout espace ϕ-stable qui contient v_0 contient aussi $\phi^i(v_0)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, donc en particulier les vecteurs $v_1, \ldots, v_d$, et un sous-espace qui contient les générateurs de F contient forcément F tout entier.*

d. On suppose désormais que $d = n$, ce qui entraîne que $F = E$, et que $\mathcal{B} = (v_0, \ldots, v_{d-1})$ est une base de E. Montrer sans calcul que $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0$ est le polynôme minimal μ_ϕ de ϕ. [Indication: P est par construction le polynôme annulateur (pour ϕ) du vecteur v_0, donc il suffit d'argumenter que P annule également les autres vecteurs de la base $\mathcal{B}$.]

$\surd$ *Pour justifier l'indication: aucun polynôme non nul de degré $< d$ ne peut annuler v_0 (car les vecteurs $v_0, v_1 = \phi(v_0), \ldots, v_{d-1} = \phi^{d-1}(v_0)$ sont linéairement indépendants) et P annule v_0 pour ϕ ; c'est donc le polynôme annulateur de v_0. Par conséquent polynôme minimal μ_ϕ, qui annule aussi v_0, doit être un multiple de P. Or le noyau $\ker(P[X := \phi])$ du polynôme P en ϕ est un espace ϕ-stable qui contient v_0, donc il contient $F = E$ d'après la question c. Un autre argument pour ce dernier pas est que le polynôme $P[X := \phi]$ en ϕ commute avec (les puissance de) ϕ, donc $P \cdot_\phi (v_i) = P \cdot_\phi \phi^i(v_0) = \phi^i(P \cdot_\phi v_0) = \phi^i(0) = 0$. En conclusion $P[X := \phi]$ annule E et $\mu_\phi = P$.*

e. Expliquer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} = C_P,$$

ce qui la matrice compagnon du polynôme P.

$\surd$ *En général la colonne j de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ contient les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de l'image $\phi(b_j)$ du vecteur j de la base $\mathcal{B}$. Ici $b_j = v_{j-1}$, et on a $\phi(v_{j-1}) = v_j$; pour $j < d$ cette image v_j est elle-même élément de la base $\mathcal{B}$ d'où la colonne avec des 0 et un seul 1, pendant que pour $j = d$ on a l'expression $v_d = -a_0v_0 - \cdots - a_{d-1}v_{d-1}$ qui donne les coefficients de la dernière colonne.*

f. Montrer, par un calcul utilisant la matrice C_P, que le polynôme caractéristique χ_ϕ est égal à P.

$\surd$ *Si l'on développe*

$$\det(XI_d - C_P) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \ldots & a_0 \\ -1 & X & 0 & \ldots & a_1 \\ 0 & -1 & X & \ldots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & X + a_{d-1} \end{vmatrix}$$

par la dernière colonne, la matrice qui détermine le cofacteur pour le coefficient à la position $(i+1, d)$, c'est-à-dire a_i ou $X + a_i$ (pour $i = d-1$), est diagonale en deux les blocs carrés de tailles $i \times i$ et $(d-1-i) \times (d-1-i)$, qui ont la forme

$$\begin{pmatrix} X & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & X & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{pmatrix} \qquad \textit{respectivement} \qquad \begin{pmatrix} -1 & X & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Leurs déterminants étant X^i et $(-1)^{d-1-i}$, le cofacteur devient X^i, et le développement donne $\chi_\phi = \chi_A = a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-2}X^{d-2} + (X + a_{d-1})X^{d-1} = P$. Une autre approche qui donne ce résultat est de ajouter X fois la dernière ligne à la précédente, puis X fois cette ligne à celle qui la précède, et ainsi de suite, de sorte que tous les coefficients X sur la diagonale soient annulés. Dans la matrice ainsi obtenue chaque colonne sauf la dernière n'a qu'un seul coefficient non nul, et qui est -1 ; on peut alors voir de différent manières que son déterminant est égal à son coefficient à la position $(1, d)$, lequel coefficient est égal à $a_0 + X(a_1 + X(\cdots + X(X + a_{d-1})\cdots)) = P$.

g. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit diagonalisable, en termes du polynôme P.

$\surd$ *Comme P est le polynôme minimal, une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit diagonalisable est que P soit scindé et à racines simples.*

Fin.