Corrigé Examen Algèbre Linéaire (L2) mardi 5 janvier 2021
8h15–11h15

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.

3 $\surd$ *Le calcul direct du polynôme caractéristique*

$$\begin{vmatrix} X-3 & 4 & -2 \\ -4 & X-3 & -4 \\ 4 & -4 & X+3 \end{vmatrix}$$

donne (avec un peu d'effort) $X^3-X^2(-3-3+3)+X(\left|\begin{smallmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right|)-\det A = X^3-3X^2+X(25-1-25)+3 = X^3-3X^2-X+3$. *C'est un peu plus simple si l'on soustrait la première colonne de la troisième, puis, additionne la troisième ligne à la première, donnant*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 \\ -4 & X-3 & 0 \\ 4 & -4 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1)(X-3)(X-1).$$

(ce qui après multiplication donne bien sur aussi $\chi_A = X^3-3X^2-X+3$*). Cette méthode astucieuse donne* χ_A *déjà sous forme factorisée ; sinon on pourra trouver les racines rationnelles parmi les diviseurs du coefficient constant* 3 *de* χ_A*. Effectivement* 1, -1 *et* 3 *sont de telles racines, et on a la décomposition* $X^3-3X^2-X+3 = (X+1)(X-1)(X-3)$*. Le polynôme caractéristique étant scindé et à racines simples,* ϕ *est diagonalisable.*
Pour $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ *et* $\lambda = 3$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$A+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A-\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad A-3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

montrant que chacune a un noyaux de dimension 1*, avec comme générateurs respectivement les vecteurs* $(3,1,-4)$, $(-1,0,1)$, *et* $(-2,1,2)$, *qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda = -1$, *pour* $\lambda = 1$ *et pour* $\lambda = 3$.

b. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

2 $\surd$ *On choisit les trois vecteurs* $(1,1,1)$, $(2,2,1)$, *et* $(1,2,2)$ *comme base* $\mathcal{B}$*, pour lequel la matrice de passage* P *de la base canonique vers* $\mathcal{B}$ *et son inverse sont*

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et puisque $\mathcal{B}$ *est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres* $-1,1,3$ *on aura* $A = PDP^{-1}$ *pour la matrice diagonale* D *de coefficients diagonaux* $-1,1,3$. *Alors* $A^n = PD^nP^{-1}$ *où* D^n *est la matrice diagonale à coefficients diagonaux* $(-1)^n, 1^n, 3^n$*, ce qui donne*

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -3a+6b-2c & 2b-2c & -3a+5b-2c \\ -a+c & c & -a+c \\ 4a-6b-2c & -2b+2c & 4a-5b+2c \end{pmatrix}$$

où $a = (-1)^n$, $b = 1^n = 1$, $c = 3^n$.

2. On considère des paires $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de suites de nombres réels a_n et b_n, qui vérifient les relations de récurrence mutuelles $a_{n+2} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n + a_{n+1} + b_n$, valables pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ces relations déterminent une unique paire de suites si en plus on donne les termes initiaux a_0, a_1 de la première suite et le terme initial b_0 de la seconde suite.

a. Pour la paires de suites vérifiant ces relations et avec les termes initiaux $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, et $b_0 = 1$, calculer les termes $a_0, \ldots, a_9$ ainsi que $b_0, \ldots, b_8$.

1 $\surd$ $0, 2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257$ *respectivement* $1, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384$.

On associe à chaque paire $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la récurrence la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs $v_n = (a_n, a_{n+1}, b_n) \in \mathbf{R}^3$.

b. Trouver une matrice $M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ tel que $v_{n+1} = M \cdot v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1 $\surd$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Trouver une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de M.

1 $\surd$ *Comme polynôme caractéristique on a* $\chi_M = X^3 - X^2 - 2X = (X+1)X(X-2)$, *il est scindé avec racines simples* $-1, 0, 2$. *Comme vecteurs propres pour* $\lambda = -1, 0, 2$ *on a respectivement* $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$ *et* $(1, 2, 3)$.

d. Donner des expressions pour les termes a_n respectivement b_n des suites de la question *a*, valables pour tout $n \in \mathbf{N}$. [On pourra utiliser *c*, sans avoir besoin de calculer M^n.]

2 $\surd$ *On peut exprimer* $v_0 = (0, 2, 1)$ *comme combinaison linéaire des vecteurs propres trouvés, en résolvant un système linéaire pour trouver les coefficients. Le résultat est* $v_0 = -(1, -1, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, -1) + \frac{1}{2}(1, 2, 3)$. *Puisque le vecteur propre* $(1, -1, 0)$ *pour* $\lambda = -1$ *correspond aux suites* $a_n = (-1)^n$, $b_n = 0$, *le vecteur propre* $(1, 0, -1)$ *pour* $\lambda = 0$ *correspond aux suites* $a_n = 0^n$, $b_n = -0^n$ *(c'est-à-dire* $a_0 = 1$, $b_0 = -1$ *et tous les autres coefficients sont nuls), et le vecteur propre* $(1, 2, 3)$ *pour* $\lambda = 2$ *correspond aux suites* $a_n = 2^n$, $b_n = 3\times 2^n$, *on trouve pour la combinaison linéaire, c'est-à-dire pour la suite de la question a,* $a_n = -(-1)^n + \frac{1}{2}0^n + \frac{1}{2}2^n$ *et* $b_n = -\frac{1}{2}0^n + \frac{3}{2}2^n$.

3. Considérons dans $\mathbf{Q}[X]$ les polynômes $A = 2X^4 - X^3 - 12X^2 - 8X - 3$ et $B = 2X^3 - 5X^2 - 3X$.

a. Trouver le quotient Q_1 et de reste R_1 dans la division euclidienne de A par B.

1 $\surd$ $Q_1 = X + 2$ *et* $R_1 = X^2 - 2X - 3$

b. Calculer ensuite $D = \mathrm{pgcd}(A, B)$.

1 $\surd$ *La division de* B *par* R_1 *donne quotient* $Q_2 = 2X - 1$ *et reste* $R_2 = X - 3$, *et ensuite la division de* R_1 *par* R_2 *est exacte (car 3 est racine de* R_1*). Donc* D *est* R_2 *rendu unitaire, mais* R_2 *est déjà unitaire, donc* $D = R_2 = X - 3$.

c. Trouver des coefficients de Bézout $S, T \in \mathbf{Q}[X]$ tels que $D = SA + TB$.

1 $\surd$ $S = -2X + 1$ *et* $T = 2X^2 + 3X - 1$.

4. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $E = \mathbf{C}^4$ de matrice, par rapport à la base canonique,

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. En utilisant la forme triangulaire en blocs de M, calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ comme produit de deux facteurs, chacun un polynôme de degré 2.

1 $\surd$ *En effet M est triangulaire supérieure en blocs 2×2. On a donc $\chi_M = \chi_A \chi_B$ où $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ sont les blocs diagonaux de M. Avec $\chi_A = \left|\begin{smallmatrix} X-2 & 4 \\ -1 & X+2 \end{smallmatrix}\right| = X^2$ et $\chi_B = \left|\begin{smallmatrix} X+3 & -1 \\ 6 & X-2 \end{smallmatrix}\right| = X^2 + X$, on obtient $\chi_M = (X^2)(X^2 + X)$.*

b. Factoriser encore ces deux polynômes, pour obtenir une factorisation complète de χ_ϕ. Vous verrez que χ_ϕ possède une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple ν.

1 $\surd$ *On a $X^2 + X = X(X+1)$, donc $\chi_\phi = X^3(X+1)$, et il a $\lambda = -1$ comme racine simple et $\nu = 0$ comme racine triple.*

c. Quelles sont les dimensions des sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de ϕ ?

1 $\surd$ *Ces dimensions sont les multiplicités de ces valeurs propres comme racine de χ_ϕ, c'est-à-dire 1 respectivement 3.*

d. Déterminer si ϕ est diagonalisable (de préférence en limitant au nécessaire les calculs).

1 $\surd$ *Comme $\lambda = -1$ est une racine simple, on aura certainement $E_\lambda = \widetilde{E}_\lambda$. Alors ϕ sera diagonalisable si et seulement si aussi $E_\nu = \widetilde{E}_\nu$, c'est-à-dire si $\dim(E_\nu) = 3$. On a $E_\nu = \ker(M) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (après réduction par la méthode de Gauss), sous-espace qui est engendré par le vecteur $(2,1,0,0)$. Comme $\dim(E_\nu) = 1 < 3 = \dim(\widetilde{E}_\nu)$, on a $E_\nu \neq \widetilde{E}_\nu$, et ϕ n'est pas diagonalisable.*

e. Déterminer la valeur minimale k pour laquelle $\widetilde{E}_\nu = \ker((\phi - \nu I)^k)$. En fonction de ce k, quel est le polynôme minimal μ_ϕ de ϕ ?

1 $\surd$ *Les matrices M^2 et M^3 sont respectivement*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

qui sont de rang 2 respectivement 1, donnant pour $\dim(\ker((\phi - I)^k))$ respectivement 2 et 3. La valeur maximale $\dim(\widetilde{E}_\nu) = 3$ étant seulement atteinte pour $k = 3$, d'où $m = 3$. Avec aussi la racine simple $\lambda = -1$, on trouve $\mu_\phi = X^m(X+1) = X^3(X+1)$.

f. Trouver une base $\mathcal{B}$, adaptée à la décomposition $E = \widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu$, et telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ soit triangulaire supérieure.

1 $\surd$ *On a $E_\lambda = \ker(M + \mathbf{I}) = \mathrm{Vect}(1,1,-1,-2)$, et on savait déjà $\ker(M - I) = \mathrm{Vect}((2,1,0,0))$. Ensuite $\ker(M^2) = \ker\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Vect}((1,2,0,0),(0,1,0,0))$ pour $k = 2$ (on garde le vecteur propre $(1,2,0,0)$ trouvé auparavant), et pareillement $\ker(M^3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}((1,2,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,3))$ pour $k = 3$, toujours en gardant les vecteurs choisis avant. Finalement $\mathcal{B} = [(1,1,-1,-2),(1,2,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,3)]$ convient comme base de trigonalisation.*

g. Déterminer cette matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

1 $\sqrt{}$ *En écrivant $\mathcal{B} = [b_1, \ldots, b_4]$, on sait déjà que $M \cdot b_1 = -b_1$ (car $b_1 \in E_\lambda = E_{-1}$) et $M \cdot b_2 = 0b_2 = 0$ (car $b_2 \in E_\nu = E_0$), ainsi que $M \cdot b_3 \in E_0 \operatorname{Vect}(b_2)$, et $M \cdot b_4 \in \ker(M^2) = \operatorname{Vect}(b_2, b_3)$. Pour trouver l'expression de chaque $M \cdot b_j$ dans la base $\mathcal{B}$, il suffit d'expliciter les deux dernières relations $M \cdot b_3 = (-4, -2, 0, 0) = -2b_2$ et $M \cdot b_4 = (-2, 1, 0, 0) = -b_2 + 2b_3$. En mettant les coordonnées de $M \cdot b_j$ dans la colonne j, on obtient la matrice*

$$T = \mathrm{Mat}_B(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la base $\mathcal{B}$ (et notamment pour b_3 et b_4) on avait beaucoup de choix, et matrice T sera différente (mais toujours diagonale en blocks triangulaires 1×1 et 3×3 avec coefficients diagonaux -1 respectivement -3) pour d'autres choix que les nôtres.