Examen Algèbre Linéaire (L2) jeudi 9 janvier 2020
8h15–11h15

Les documents autorisés sont le cours écrit et son résumé distribués. L'utilisation d'une calculatrice, ou de tout autre appareil électronique, est interdite. Tout résultat vu en cours ou en TD peut être cité et utilisé. Les trois parties sont indépendants, barème indicatif : 6, 8, 6 pour les parties, respectivement.

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.
b. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

2. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $E = \mathbf{C}^4$ de matrice, par rapport à la base canonique,

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. En utilisant la forme triangulaire en blocs de M, calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ comme produit de deux facteurs, chacun un polynôme de degré 2.
b. Factoriser encore ces deux polynômes, pour obtenir une factorisation complète de χ_ϕ. Vous verrez que χ_ϕ possède une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple ν.
c. Donner les dimensions des sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de ϕ, sans pour le moment calculer explicitement ces sous-espaces.
d. Déterminer l'espace propre E_ν pour la racine triple. Est-ce que ϕ est diagonalisable ?
e. En considérant les dimensions $\dim(\ker((\phi - \nu I)^k))$ pour différents $k \in \mathbf{N}$, déduire la multiplicité m de ν comme racine du polynôme minimal μ_ϕ, et donner ensuite explicitement μ_ϕ.
f. Calculer explicitement des bases du sous-espace propre $E_\lambda = \ker(M - \lambda I)$ (pour la racine simple λ de χ_ϕ), ainsi que des sous-espaces $\ker(M - \nu I)^k$ pour $k = 1, \ldots, m$ (pour la racine triple ν de χ_ϕ, avec m sa multiplicité dans μ_ϕ trouvée dans la question précédente).
g. Parmi ces sous-espaces, lesquels figurent dans une décomposition en somme directe de l'espace E tout entier ?
h. Donner une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation de ϕ, ainsi que la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

 sujet continué au verso

3. Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ réelles qui vérifient pour $n \in \mathbf{N}$ la relation $\mathcal{R}$: $a_{n+4} = 2a_{n+3} - 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$. Une telle suite a est déterminée par ses 4 termes initiaux a_0, a_1, a_2, a_3, et il existe une base $\mathcal{E} = [p, q, r, s]$ de E telle que $a = a_0 p + a_1 q + a_2 r + a_3 s$, quelle que soit la suite $a \in E$. Soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$ l'endomorphisme de décalage $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$; autrement dit la suite $\phi(a)$ est celle donnée par $\phi(a)_n = a_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

a. Décrire les suites p, q, r, et s qui forment la base $\mathcal{E}$, et la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi)$ de ϕ par rapport à cette base.

b. Montrer que $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ est le polynôme minimal μ_ϕ ; ϕ est-il diagonalisable ?

c. Décomposer $\mu_\phi = PQ$ où $P = (X-1)^k$, pour un certain $k > 0$ et avec P et Q premiers entre eux. En considérant Q, conclure que $\lambda = 1$ est l'unique valeur propre (réelle) de ϕ.

d. Trouver une décomposition $E = V \oplus W$ où V et W sont des sous-espaces ϕ-stables de E (et chacun dimension non nulle).

e. Trouver des coefficients de Bézout $S, T \in K[X]$ tels que $SP + TQ = 1 = \mathrm{pgcd}(P, Q)$.

f. Pour une suite $a \in E$, décrire explicitement les suites $v \in V$ et $w \in W$ tels que $a = v + w$.

Fin.