Contrôle continu Algèbre Linéaire mercredi 2 octobre 2019
9h–10h

Consultation du cours écrit, et de son résumé, est autorisée. Les espaces vectoriels sont sur un corps K, que vous pouvez supposer être un parmi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

Les deux exercices sont indépendants.

1. Déterminer la matrice inverse (si elle existe) de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Montrer les étapes de la méthode que vous utilisez pour la calculer, et n'oubliez pas de vérifier votre résultat (au moins sur votre brouillon) en le multipliant par A.

2. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace vectoriel des polynômes en X de degré plus petit que 4. Dans E on considère la famille de vecteurs (c'est-à-dire de polynômes) $\mathcal{F} = [Q, R, S]$, où

$$\begin{aligned} Q &= 2 - X + 4X^2 + X^3 \\ R &= 1 + 3X - 2X^3 \\ S &= -1 + X - 3X^2 + X^3 \end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ la base canonique de K^3.

a. Argumenter qu'il existe une application linéaire unique $f : K^3 \to E$ telle que $f(\mathbf{e}_1) = Q$, $f(\mathbf{e}_2) = R$, et $f(\mathbf{e}_3) = S$, et décrire $f((x, y, z))$ pour une élément $(x, y, z) \in K^3$ quelconque.

b. Montrer que f est une application injective.

c. On pose $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(Q, R, S)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de V.

d. On pose $W = \{ P \in V \mid P[X := 1] = 0 \text{ et } P[X := -1] = 0 \}$ (ici $P[X := a] \in K$ désigne la valeur obtenue si l'on substitue a pour X dans le polynôme P). On admet que W est une sous-espace vectoriel de V et donc aussi de E. En écrivant $P = xQ + yR + zS$ pour $x, y, z \in K$, donner un système d'équations en x, y, z qui exprime la condition $P \in W$.

e. Donner une base de W.

Fin.