Corrigé Examen Algèbre Linéaire (L2) vendredi 11 janvier 2018
9h–12h

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X-1 & -2 & -4 \\ 1 & X+2 & 5 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix}$$

est un peu fastidieux mais possible, et donne $X^3+X^2(-1+2-3)+X(\left|\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -3 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{smallmatrix}\right|) - \det A = X^3-2X^2+X(0-5+4)--2 = X^3-2X^2-X+2$. *C'est un peu plus simple si l'on additionne la seconde ligne à la première, puis soustrait la première colonne de la seconde, donnant*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & X & 1 \\ 1 & X+2 & 5 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & 2 \\ 2 & X+1 & 5 \\ -2 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X+1)(X^2-3X+2).$$

(ce qui après multiplication donne bien sur aussi $\chi_A = X^3-2X^2-X+2$*).*

b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ *Les racines rationnelles sont diviseurs du coefficient constant* 2 *de* χ_A*. Effectivement* -1, 1 *et* 2 *sont de telles racines, et on a la décomposition* $X^3-2X^2-X+2 = (X+1)(X-1)(X-2)$.

c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique étant scindé et à racines sont simples,* ϕ *est diagonalisable. Pour* $\lambda=-1$, $\lambda=1$ *et* $\lambda=2$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$A+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A-\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A-2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

montrant que chacune a un noyaux de dimension 1*, avec comme générateurs respectivement les vecteurs* $(1,-1,0)$, $(1,-2,1)$, *et* $(2,-3,2)$, *qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda=-1$, *pour* $\lambda=1$ *et pour* $\lambda=2$.

d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *On choisit les trois vecteurs $(-1,0,1)$, $(-4,1,5)$, et $(-6,2,7)$ comme base $\mathcal{B}$, pour lequel la matrice de passage P de la base canonique vers $\mathcal{B}$ et son inverse sont*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et puisque $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres $-1,1,2$ on aura $A = PDP^{-1}$ pour la matrice diagonale D de coefficients diagonaux $-1,1,2$. Alors $A^n = PD^nP^{-1}$ où D^n est la matrice diagonale à coefficients diagonaux $(-1)^n, 1^n, 2^n$, ce qui donne

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} a-2b+2c & -2b+2c & -a-b+2c \\ -a+4b-3c & 4b-3c & a+2b-3c \\ -2b+2c & -2b+2c & -b+2c \end{pmatrix}$$

où $a = (-1)^n$, $b = 1^n = 1$, $c = 2^n$.

2. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$, est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. En utilisant la forme triangulaire en blocs de M, calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ comme produit de deux facteurs, chacun un polynôme de degré 2.

$\surd$ *En effet M est triangulaire en blocs 2×2. On a donc $\chi_M = \chi_A \chi_B$ où $A = \left(\begin{smallmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ sont les blocs diagonaux de M. Avec $\chi_A = \left|\begin{smallmatrix} X+3 & 6 \\ -2 & X-4 \end{smallmatrix}\right|$ et $\chi_B = \left|\begin{smallmatrix} X-3 & 9 \\ -1 & X+3 \end{smallmatrix}\right|$ on obtient $\chi_M = (X^2 - X)X^2$.*

b. Factoriser encore ces deux polynômes, pour obtenir une factorisation complète de χ_ϕ. Vous verrez que χ_ϕ possède une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple ν.

$\surd$ *On a $X^2 - X = X(X-1)$, donc $\chi_\phi = X^3(X-1)$, et il a $\lambda = 1$ comme racine simple et $\nu = 0$ comme racine triple.*

c. Donner les dimensions des sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de ϕ, sans pour le moment calculer explicitement ces sous-espaces (dont la théorie dit que $\widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu = \mathbf{C}^4$).

$\surd$ *Ces dimensions sont les multiplicités de ces valeurs propres comme racine de χ_ϕ, c'est-à-dire 1 respectivement 3.*

d. Déterminer l'espace propre E_ν pour la racine triple. Est-ce que ϕ est diagonalisable ?

$\surd$ *On a $E_\nu = \ker(M - 0I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (après réduction par la méthode de Gauss), sous-espace qui est engendré par les vecteurs $(-2,1,0,0)$ et $(-1,0,3,1)$. Comme $\dim(E_\nu) = 2 < 3 = \dim(\widetilde{E}_\nu)$, on a $E_\nu \neq \widetilde{E}_\nu$, et ϕ n'est pas diagonalisable.*

e. En considérant les dimensions $\dim(\ker((\phi - \nu I)^k))$ pour $k = 1,2,3$ (dont celle pour $k = 1$ est déjà déterminée dans la question précédente), déduire la multiplicité m de ν comme racine du polynôme minimal μ_ϕ, et donner ensuite explicitement μ_ϕ.

$\surd$ *On sait que cette suite de dimensions est strictement croissante jusqu'au moment que sa valeur finale $\dim(\widetilde{E}_\nu) = 3$ est atteinte. Puisque pour $k = 1$ cette dimension est $\dim(E_\nu) = 2$ la seule possibilité est que ces dimensions sont successivement $2,3,3$. La valeur maximale est atteinte pour $k = 2$, d'où $m = 2$. Avec aussi la racine simple $\lambda = 0$, on trouve $\mu_\phi = X^2(X-1)$.*

f. Vérifier en calculant $(M-\nu I)^m$ que son noyau est de dimension 3.

$\surd$ *On a*

$$(M-\nu I)^m = M^2 = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 & 15 \\ 2 & 4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1*, donc* $\mathrm{Ker}(M^2)$ *est de dimension* $4-1=3$.

g. Décrire maintenant explicitement les sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$.

$\surd$ *D'après la question précédente* $\widetilde{E}_\nu = \widetilde{E}_0 = \ker(M^2)$*, qui est (comme toutes les lignes de* M^2 *sont proportionnelles) égal à* $\ker(1\ 2\ 2\ {-5}) = \mathrm{Vect}\big((-2,1,0,0),(-2,0,1,0),(5,0,0,1)\big)$.
On a $\widetilde{E}_\lambda = E_1 = \mathrm{Vect}(b_1)$ *pour* $b_1 = (-3,2,0,0)$*, sous-espace qu'on peut calculer comme* $\ker(M-I)$ *mais aussi comme l'image de* ϕ^2*, endomorphisme qui s'annule sur* $\widetilde{E}_0$ *mais agit de façon inversible sur le sous-espace propre* E_1 *(qui est* ϕ*-stable, donc une telle action est définie).*

h. Trouver une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation, et détailler la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

$\surd$ *Il convient de commencer la base de* $\widetilde{E}_\nu = \widetilde{E}_0$ *avec une base du sous-espace propre* E_0*, donc on pose* $b_2 = (-2,1,0,0)$ *et* $b_3 = (-1,0,3,1)$*, et compléter avec n'importe quel vecteur indépendant de* $\widetilde{E}_0$*, par exemple* $b_4 = (-2,0,1,0)$*. Pour ce choix* $\mathcal{B} = [b_1,b_2,b_3,b_4]$ *on a, puisque* $\phi(b_1)=b_1$*,* $\phi(b_2)=0$*,* $\phi(b_3)=0$ *et* $\phi(b_4) = (5,-3,3,1) = -3b_2+b_3$*, que*

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *a.* Dans $\mathbf{Z}$, calculer $\mathrm{pgcd}(10043, 3984)$.

$\surd$ *En écrivant '%' le reste après division euclidienne :* $10043 \,\%\, 3984 = 2075$, $3984 \,\%\, 2075 = 1909$, $2075 \,\%\, 1909 = 166$, $1909 \,\%\, 166 = 83$, $166 \,\%\, 83 = 0$*, donc* $\mathrm{pgcd}(10043, 3984) = 83$.

b. Dans $\mathbf{Z}$, calculer $d = \mathrm{pgcd}(203, 144)$ et trouver $s,t \in \mathbf{Z}$ tels que $d = 203s + 144t$.

$\surd$ $203 \,\%\, 144 = 59 = 203 - 144$, $144 \,\%\, 59 = 26 = -2\times 203 + 3\times 144$, $59 \,\%\, 26 = 7 = 5\times 203 - 7\times 144$, $26 \,\%\, 7 = 5 = -17\times 203 + 24\times 144$, $7 \,\%\, 5 = 2 = 22\times 203 - 31\times 144$, $5 \,\%\, 2 = 1 = -61\times 203 + 86\times 144$ *et c'est clairement le* pgcd*, donc* $s=-61$ *et* $t=86$ *conviennent.*

c. Dans $\mathbf{Q}[X]$, calculer $\mathrm{pgcd}(X^3-2X^2+X-2, 2X^3+X^2+2X+1)$.

$\surd$ $(2X^3+X^2+2X+1) \,\%(X^3-2X^2+X-2) = 5X^2+5 = 5(X^2+1)$ *et* $(X^3-2X^2+X-2) \,\%(X^2+1) = 0$ *donc* $\mathrm{pgcd}(X^3-2X^2+X-2, 2X^3+X^2+2X+1) = X^2+1$.

4. Soit ϕ un endomorphisme d'un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel E, dont le polynôme caractéristique χ_ϕ et le polynôme minimal μ_ϕ sont tous deux égaux à $X^4+X^3-X^2+1 = (X+1)(X^3-X+1)$.

a. Argumenter que $E = E_{-1} \oplus \ker(\phi^3-\phi+I)$ où E_{-1} est le sous-espace propre pour $\lambda=-1$.

$\surd$ *Les facteurs* $X+1$ *et* X^3-X+1 *sont premier entre eux, car* $X+1$ *est irréductible et ne divise pas* X^3-X+1 *(le reste de la division est* 1*). Alors le lemme des noyaux s'applique pour* $\mu_\phi = (X+1)(X^3-X+1)$*, et puisque* μ_ϕ *est un polynôme annulateur de* ϕ*, la conclusion du lemme est que* $\ker(0) = E = \ker(\phi-I) \oplus \ker(\phi^3-\phi+I) = E_{-1} \oplus \ker(\phi^3-\phi+I)$.

b. Trouver un polynôme P tel que $P[\phi]$ soit la projection sur E_{-1} parallèle à $\ker(\phi^3 - \phi + I)$.

$\surd$ *Dans cette situation les coefficients de Bézout pour* $1 = \operatorname{pgcd}(X+1, X^3 - X + 1)$ *sont utiles, c'est-à-dire polynômes* S, T *tels que* $1 = S(X^3 - X + 1) + T(X+1)$*. On les trouve en général en appliquant l'algorithme d'Euclide, qui dans ce cas trouve un reste de degré* 1*, et donc le* pgcd*, après une seule division. Il s'agit de la division de* $X^3 - X + 1$ *par* $X + 1$*, qui donne quotient* $Q = X^2 - X$ *et reste* $R = 1$*; l'expression* $1 = R = X^3 - X + 1 - Q(X+1)$ *montre que les coefficients de Bézout sont* $S = 1$ et $T = -Q = -X^2 + X$*. Dans l'expression* $1 = S(X^3 - X + 1) + T(X + 1)$ *le terme* $S(X^3 - X + 1)$ *donne le polynôme* P *cherché, et* $P[\phi] = \phi^3 - \phi + I$ *est la projection sur* E_{-1} *parallèle à* $\ker(\phi^3 - \phi + I)$ *(elle s'annule sur* $\ker(\phi^3 - \phi + I)$*, et agit comme l'identité sur* E_{-1}*).*

Fin.