Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire (L2) mercredi 7 novembre 2018
8h15–10h15

1. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & 2 & 2 \\ -6 & X+4 & 3 \\ 2 & -2 & X-1 \end{vmatrix}$$

donne $\chi_A = X^3 - X^2 - 2X$. *On pourrait aussi additionner la première colonne au seconde, et ensui soustraire la seconde lgne de la première, pour trouver*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ -6 & X-2 & 3 \\ 2 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X+2 & -1 \\ 2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2+X)$$

b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ $X^3 - X^2 - 2X = X(X+1)(X-2)$

c. Déduire de la décomposition trouvée que ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique a trois racines distinctes,* $0, -1, 2$, *qui sont donc des valeurs propres. Associée à chacune est un espace propre qui a dimension au moins* 1, *leur somme qui est directe a dimension au moins* 3, *ce qui est donc l'espace* $E = \mathbf{Q}^3$ *tout entier. Cela veut dire que* ϕ *est diagonalisable.*

d. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Pour* $\lambda = 0$ *un vecteur propre est* $(1, 0, 2)$, *pour* $\lambda = -1$ *on a un vecteur propre* $(0, 1, -1)$, *et pour* $\lambda = 2$ *on a un vecteur propre* $(1, 1, 0)$.

2. On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence $a_{n+2} = 3a_n + 2a_{n+1}$ et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

a. Calculer les 8 premiers termes de cette suite.

$\surd$ $0, 1, 2, 7, 20, 61, 182, 547$

b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrit

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

$\surd$ *Comme indiqué dans le cours, les lignes sauf la dernières sont celles de la matrices identité un cran plus bas, et la dernière ligne représente la relation de récurrence:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

c. Trouver un polynôme dont les valeurs propres de A sont des racines.

$\surd$ *On voit que $\binom{a_0}{a_1}$ est vecteur propre de A (avec valeur propre λ) si et seulement si la suite avec ces valeurs initiales et vérifiant la relation de récurrence est une suite géométrique (de raison λ). Or une suite géométrique $(c\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ (avec $c, \lambda \in \mathbf{C}$ et $c \neq 0$) vérifie la relation de récurrence dès que celle-ci est vérifiée pour $n = 0$, c'est-à-dire que $c\lambda^2 = 3c\lambda^0 + 2c\lambda^1$ (car le cas général de la relation de récurrence en résulte après multiplication par λ^n). Cette équation se simplifie $\lambda^2 = 3 + 2\lambda$, et λ est donc racine de $X^2 - (2X + 3) = X^2 - 2X - 3$. Alternativement on peut prendre le polynôme caractéristique χ_A qui est aussi $X^2 - 2X - 3$.*

d. Trouver les valeurs propres de A, et une base de vecteurs propres.

$\surd$ *En utilisant la formule pour les racines d'un polynôme de degré 2 on trouve $\frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = 1 \pm \sqrt{4}$ pour ces racines, ce qui donne $\lambda = -1$ et $\lambda = 3$ comme valeurs propres. Il est aussi valable de simplement "voir" la factorisation $X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$. D'après la question précédente, pour chaque valeur $\lambda \in \{-1, 3\}$, le vecteur $\binom{1}{\lambda}$ est vecteur propre.*

e. En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite.

$\surd$ *La matrice de passage est $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $P^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et on a donc $A^n = PD^nP^{-1}$ où D^n est diagonale avec coefficients diagonaux $(-1)^n$ et 3^n. Il n'est pas nécessaire de calculer A^n entièrement, il suffit de connaître $\binom{a_n}{a_{n-1}} = A^n \cdot \binom{a_0}{a_1}$, et de cela juste la première composante a_n, qui est donc l'unique coefficient de la matrice 1×1 : $(1\ 0) \cdot A^n \cdot \binom{0}{1} = \frac{1}{4}(1\ 1) \cdot D^n \cdot \binom{-1}{1}$, ce qui donne $a_n = \frac{1}{4}(-(-1)^n + 3^n)$. Une approche alternative est de chercher, au lieu de P et P^{-1}, directement la combinaison linéaire $a(-1)^n + b3^n$ des deux suites géométriques vérifiant la récurrence que donne les valeurs $0, 1$ respectivement pour $n = 0$ et $n = 1$, et de résoudre ce système linéaire 2×2 en a, b ; on trouve $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$.*

3. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace des polynômes en X de degré < 4. On définit un endomorphisme ϕ de E par $\phi : P \mapsto (1+X)P'$, où P' est la dérivée de P (par rapport à X, au sens de l'analyse) ; puisque $\deg(P) < 4$ entraîne $\deg(P') < 3$, on a $\deg((1+X)P') < 4$, et l'application ϕ est bien définie $E \to E$; on admet que c'est une application linéaire.

a. Donner la matrice A de ϕ par rapport à la base canonique $[1, X, X^2, X^3]$ de E.

$\surd$ *Les colonnes expriment respectivement $\phi(1) = 0$, $\phi(X) = 1 + X$, $\phi(X^2) = 2X(1 + X)$ et $\phi(X^3) = 3X^3(1 + X)$ dans la base $[1, X, X^2, X^3]$, donc c'est la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b. Montrer que ϕ est diagonalisable, et donner ses valeurs propres (on ne demande pas de trouver une base de vecteurs propres).

$\surd$ *Le polynôme caractéristique de cette matrice triangulaire est $X(X - 1)(X - 2)(X - 3)$, et A a donc $0, 1, 2, 3$ comme valeurs propres. Chaque sous-espace propre étant de dimension 1 (au moins), leur somme directe est de dimension 4 et donc égale à E tout entier, et ϕ est diagonalisable.*

c. On pose $P = 2X + 3X^2 + X^3$, $Q = 1 + X$ et $V = \operatorname{Vect}(P, Q)$ (deux vecteurs particuliers dans E, et le sous-espace qu'ils engendrent). Montrer que V est un sous-espace ϕ-stable, et que $[P, Q]$ est une base de V.

$\surd$ *Il suffit de vérifier que V contient $\phi(P)$ et $\phi(Q)$, ce qui est le cas, car $\phi(P) = (1 + X)(2 + 6X + 3X^2) = 2 + 8X + 9X^2 + 3X^3 = 3P + 2Q$ et $\phi(Q) = 1 + X = Q$. Par définition de V, la famille $[P, Q]$ est génératrice de V, et puisque elle est aussi libre, c'est une base de V.*

d. Donner la matrice $B = \mathrm{Mat}_{[P,Q]}(\phi|_V)$ de la restriction à V de ϕ, par rapport à la base $[P, Q]$ de V.

$\surd$ *D'après le calcul ci-dessus de $\phi(P)$ et $\phi(Q)$ en termes de P, Q, la matrice demandée est $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.*

e. Trouver les valeurs propres de cette restriction $\phi|_V$, ainsi qu'une base de V formée de vecteurs propres (toujours pour $\phi|_V$).

$\surd$ *Les valeurs propres de cette matrices triangulaire inférieure sont $\lambda = 2$ et $\lambda = 1$, et comme vecteurs propres correspondants on trouve $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. La base de V cherchée est alors $[P + 3Q, Q]$.*

Fin.