**Corrigé Travaux dirigés 6L19 Géométrie, Feuille 2** 22 janvier 2009

**1.** Soit $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ quatre points en «position générale», ce qui veut dire ici que les isobarycentres de chacune des 15 différentes parties non vides de $\{A, B, C, D\}$ (pourquoi 15 ?) sont tous distincts.

*a.* Montrer que les trois droites, passant chacune par le milieu de deux points parmi $A, B, C, D$ et par le milieu des deux points restants, sont concourantes (c'est-à-dire elles ont un point commun à tous les trois).

$\surd$ *Le point que ces trois droites ont communs est l'isobarycentre* $P = \operatorname{bar}(A, B, C, D)$ *des quatre points. En effet, la règle de l'associativité des barycentres permet de le calculer* $P$ *par exemple comme* $\operatorname{bar}((\operatorname{bar}(A, B), 2), (\operatorname{bar}(C, D), 2))$ *ce qui montre que ce point est aligné avec les isobarycentres de* $(A, B)$ *et de* $(C, D)$ *; le même raisonnement montre que* $P$ *est aligné avec les isobarycentres de* $(A, C)$ *et de* $(B, D)$*, ainsi qu'avec ceux de* $(A, D)$ *et de* $(B, C)$

*b.* Indiquer encore 4 autres lignes qui passent par le même point.

$\surd$ *Le même isobarycentre* $P$ *se calcule aussi comme* $\operatorname{bar}(A, 1), (\operatorname{bar}(B, C, D), 3))$*, ce qui montre qu'il est aligné avec* $A$ *et l'isobarycentre de* $(B, C, D)$*. Il l'est aussi avec* $B$ *et l'isobarycentre de* $(A, C, D)$*, avec* $C$ *et l'isobarycentre de* $(A, B, D)$*, et avec* $D$ *et l'isobarycentre de* $(A, B, C)$*.*

**2.** Soit $S$ une partie non vide de $\mathcal{A}$. Montrer que $S$ est un sous-espace affine de $\mathcal{A}$ si et seulement si pour toute paire de points distincts $A, B \in S$ la droite $\mathcal{D}_{A,B}$ passant par $A$ et $B$ est incluse dans $S$.

$\surd$ *Pour être sous-espace affine de* $\mathcal{A}$ *il faut et il suffit que* $S$ *soit fermé sous l'opération de formation de barycentres de collections pondérées de masse non nulle. On peut décrire la droite passant par* $A, B \in S$ *comme* $\mathcal{D}_{A,B} = \{\operatorname{bar}((A, 1-\mu), (B, \mu)) \mid \mu \in K\}$ *donc pour que* $S$ *soit sous-espace affine, il faut que* $\mathcal{D}_{A,B} \subseteq S$*. Réciproquement, si* $\mathcal{D}_{A,B} \subseteq S$ *pour tout* $A, B \in S$*, alors* $S$ *est fermé sous l'opération de formation de barycentres de collections de deux points pondérées, de masse non nulle. Mais par l'associativité de barycentres, toute formation de barycentre d'une collection de points pondérés* $X$ *peut être décomposée en une suite d'opérations qui ne font intervenir que deux points à la fois. Formellement, on utilise récurrence sur le nombre de points dans la collection pondérée. Si* $X$ *a deux points* $A, B$*, son barycentre se trouve sur* $\mathcal{D}_{A,B}$ *qui est inclus dans* $S$ *par hypothèse. Si* $X$ *a* $n \geq 3$ *points, on choisit une sous-collection* $X'$ *à* $n-1$ *points et de masse non nulle, alors* $P = \operatorname{bar}(X') \in S$ *par hypothèse de récurrence, et* $\operatorname{bar}(X) = \operatorname{bar}((P, \mu(X')), (A, \mu)) \in \mathcal{D}_{P,A} \subseteq S$*, où* $(A, \mu)$ *est le point exclus de* $X'$ *avec son poids. Le seul souci est de pouvoir choisir* $X'$ *de masse non nulle. Si c'était impossible, chaque point aurait un poids égal à* $\mu(X)$ *(car son complément est de masse nulle) d'où* $\mu(X) = n\mu(X)$ *et* $\mu(X) = 0$*, une contradiction. [On peut observer qu'on a divisé par* $n-1$ *dans l'argument ; en effet si* $K$ *est de caractéristique fini, cet argument ne marche pas, et on peut avoir des collections de masse non nulle dont toute sous-collection de* $n-1$ *points est de masse nulle. Pour* $K = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*, l'énoncé est faux.]*

**3.** Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$, et $(A_1, \ldots, A_n)$ et $(B_1, \ldots, B_n)$ deux $n$-uplets de points de $\mathcal{A}$, dont les isobarycentres sont notés respectivement $A$ et $B$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = n\overrightarrow{AB}$.

$\surd$ *On peut calculer* $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{A_iA} + \overrightarrow{AB_i}) = \vec{0} + n\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AB}$ *d'après les règles* $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PA_i} = n\overrightarrow{PA}$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PB_i} = n\overrightarrow{PB}$*, appliquées pour* $P = A$*. On pourra également raisonner de façon plus symétrique* $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{A_iA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_i}) = \vec{0} + n\overrightarrow{AB} + \vec{0} = n\overrightarrow{AB}$*.*

**4.** Soit $A, B, C \in \mathcal{A}$ trois points non alignés, et $P = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.

*a.* Exprimer $P$ comme le barycentre des points $A, B, C$, chacun muni d'un poids convenable.

$\surd$ $P = \operatorname{bar}((A, 1-\lambda-\mu), (B, \lambda), (C, \mu))$.

*b.* On veut construire les points d'intersection $a$ de $\mathcal{D}_{A,P}$ et $\mathcal{D}_{B,C}$, $b$ de $\mathcal{D}_{B,P}$ et $\mathcal{D}_{A,C}$, et $c$ de $\mathcal{D}_{C,P}$ et $\mathcal{D}_{A,B}$. Montrer que si l'un des nombres $1-\lambda-\mu$, $\lambda$, et $\mu$ vaut 1, alors l'une de ces paires de droites est parallèle, et ne définit donc pas de point d'intersection.

$\surd$ *Si l'un de ces nombres vaut* 1*, alors la somme des deux autres vaut* 0*. Si par exemple* $1-\lambda-\mu = 1$*, l'expression de* $P$ *par rapport à* $A$ *devient* $P = A + \lambda\overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{AC} = A + \lambda\overrightarrow{CB}$ *d'où* $\overrightarrow{AP}$ *et* $\overrightarrow{CB}$ *sont liés et l'intersection* $a$ *n'existe pas. Les deux autres cas sont similaires.*

*c.* On suppose désormais le cas contraire ($1 \notin \{1-\lambda-\mu, \lambda, \mu\}$). Montrer l'existence des trois points d'intersection indiqués, les exprimant comme des barycentres convenables.

$\surd$ *Sous l'hypothèse donnée les points $a = \mathrm{bar}((B,\lambda),(C,\mu))$, $b = \mathrm{bar}((A,1-\lambda-\mu),(C,\mu))$ et $c = \mathrm{bar}((A,1-\lambda-\mu),(B,\lambda))$ sont bien définis, et ont les colinéarités nécessaires pour être à l'intersection des deux droites indiquées, grâce à l'associativité des barycentres : par exemple $a$ est visiblement colinéair avec $B$ et $C$, et $P = \mathrm{bar}((A,1-\lambda-\mu),(a,\lambda+\mu))$ est colinéair avec $A$ et $a$. Comme les droites en question ne peuvent pas être identiques, il n'existe qu'un seul tel point commun.*

*d.* Montrer que si l'un des nombres $1-\lambda-\mu$, $\lambda$, et $\mu$ vaut 0, alors $\{a,b,c\} \cap \{A,B,C\} \neq \emptyset$.

$\surd$ *Si $1-\lambda-\mu = 0$ on a $b = \mathrm{bar}((C,\mu)) = C$ et $c = \mathrm{bar}((B,\lambda)) = B$. De façon similaire $\lambda = 0$ implique $a = C$ et $c = A$, pendant que $\mu = 0$ implique $a = B$ et $b = A$.*

*e.* Si $\{1-\lambda-\mu, \lambda, \mu\} \cap \{0,1\} = \emptyset$, montrer que les trois paires de vecteurs $(\overrightarrow{Ba}, \overrightarrow{aC})$, $(\overrightarrow{Cb}, \overrightarrow{bA})$, et $(\overrightarrow{Ac}, \overrightarrow{cB})$ sont toutes proportionnels, sans que l'un des vecteurs soit nul, et que les rapports de ces trois paires vérifient $\dfrac{\overrightarrow{Ba}}{\overrightarrow{aC}} \times \dfrac{\overrightarrow{Cb}}{\overrightarrow{bA}} \times \dfrac{\overrightarrow{Ac}}{\overrightarrow{cB}} = 1$.

$\surd$ *Comme $a = \mathrm{bar}((B,\lambda),(C,\mu))$, les vecteurs $\overrightarrow{Ba}$ et $\overrightarrow{aC}$ sont proportionnels avec rapport $\overrightarrow{Ba} : \overrightarrow{aC} = \mu : \lambda$. De façon similaire $\overrightarrow{Cb} : \overrightarrow{bA} = 1-\lambda-\mu : \mu$ et $\overrightarrow{Ac} : \overrightarrow{cB} = \lambda : 1-\lambda-\mu$. Comme aucun des nombres dans ces rapports est nul, on a $\dfrac{\overrightarrow{Ba}}{\overrightarrow{aC}} \times \dfrac{\overrightarrow{Cb}}{\overrightarrow{bA}} \times \dfrac{\overrightarrow{Ac}}{\overrightarrow{cB}} = \frac{\mu}{\lambda} \times \frac{1-\lambda-\mu}{\mu} \times \frac{\lambda}{1-\lambda-\mu} = 1$*

*f.* Conclure maintenant le théorème de Ceva : Si $A,B,C \in \mathcal{A}$ forment un triangle et si $a \in \mathcal{D}_{B,C}$, $b \in \mathcal{D}_{A,C}$ et $c \in \mathcal{D}_{A,B}$ sont trois points, distincts de $A,B,C$, tels que les droites $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$ et $\mathcal{D}_{C,c}$ soient concourantes, alors $\dfrac{\overrightarrow{Ba}}{\overrightarrow{aC}} \times \dfrac{\overrightarrow{Cb}}{\overrightarrow{bA}} \times \dfrac{\overrightarrow{Ac}}{\overrightarrow{cB}} = 1$. (La réciproque n'est pas vraie dans cette formulation, mais le devient si l'on remplace « concourantes » par « concourantes ou parallèles ».)

$\surd$ *On applique tout ce qui est déduit précédemment. Soit $P$ le point commun de $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$ et $\mathcal{D}_{C,c}$, et soit $(1-\lambda-\mu, \lambda, \mu)$ ces coordonnées barycentriques par rapport au repère affine $A,B,C$ du sous-espace affine $\mathrm{Aff}(A,B,C)$ de $\mathcal{A}$ (il est évident que $P$ appartient à ce sous-espace). L'existence des points $a \in \mathcal{D}_{B,C} \cap \mathcal{D}_{A,P}$, $b \in \mathcal{D}_{A,C} \cap \mathcal{D}_{B,P}$ et $c \in \mathcal{D}_{A,B} \cap \mathcal{D}_{C,P}$ montre d'après la question b que $1 \notin \{1-\lambda-\mu, \lambda, \mu\}$. Aussi l'hypothèse $\{a,b,c\} \cap \{A,B,C\} = \emptyset$ entraîne $0 \notin \{1-\lambda-\mu, \lambda, \mu\}$ d'après la question d. Alors la question e permet de conclure $\dfrac{\overrightarrow{Ba}}{\overrightarrow{aC}} \times \dfrac{\overrightarrow{Cb}}{\overrightarrow{bA}} \times \dfrac{\overrightarrow{Ac}}{\overrightarrow{cB}} = 1$.*

**5.** Soit $F,G$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{A}$, de direction respectivement $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$.

*a.* Montrer que si $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} = E$ alors $F \cap G \neq \emptyset$.

$\surd$ *Choisissons $A \in F$ et $B \in G$; alors pour $C \in \mathcal{A}$ on aura $C \in F \cap G$ si et seulement si $\overrightarrow{AC} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{G}$. D'après l'hypothèse $\overrightarrow{AB}$ s'écrit (comme tout vecteur de $E = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$) d'au moins une manière comme $\overrightarrow{AB} = \vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in \overrightarrow{F}$ et $\vec{y} \in \overrightarrow{G}$. Alors on peut prendre $C = A + \vec{x} = B - \vec{y}$ de sorte que $\overrightarrow{AC} = \vec{x} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{BC} = -\vec{y} \in \overrightarrow{G}$.*

*b.* Soit $A \in F$ et $B \in G$ des points quelconques choisis dans ces sous-espaces affines. Montrer que $F \cap G \neq \emptyset$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$.

$\surd$ *Si $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, l'argument donné dans le point précédent pour construire $C \in F \cap G$ reste valable (à part de la phrase en parenthèses). Pour la réciproque, on constate que l'existence de $C \in F \cap G$ entraîne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ avec $\overrightarrow{AC} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{CB} \in \overrightarrow{G}$ et donc $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$.*

*c.* Supposons maintenant $F \cap G = \emptyset$. Montrer qu'il existe des sous-espaces affines $F_0, G_0$ de $\mathcal{A}$, contenant respectivement $F$ et $G$, qui vérifient aussi $F_0 \cap G_0 = \emptyset$ et qui en plus aient la même direction : $\overrightarrow{F_0} = \overrightarrow{G_0}$ (ils sont dits parallèles).

$\surd$ *La condition $F \cap G = \emptyset$ équivaut d'après la question précédente à $\overrightarrow{AB} \notin \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. Les conditions $F \subseteq F_0$ et $G \subseteq G_0$ impliquent que la direction commune $\overrightarrow{F_0} = \overrightarrow{G_0}$ de $F_0$ et $G_0$ doit contenir au moins $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$, et donc $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. En plus, pour avoir $F_0 \cap G_0 = \emptyset$ il faut (comme pour $F$ et $G$) que $\overrightarrow{AB} \notin \overrightarrow{F_0} + \overrightarrow{G_0} = \overrightarrow{F_0}$ (la dernière égalité vient du fait que tout sous-espace vectoriel $V$ vérifie $V + V = V$). Donc le choix le plus simple pour $\overrightarrow{F_0} = \overrightarrow{G_0}$ est de prendre $\overrightarrow{F_0} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, car on sait déjà $\overrightarrow{AB} \notin \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ (mais il n'est pas interdit de prendre pour $\overrightarrow{F_0}$ un sous-espace plus grand que $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ à condition qu'il ne contienne toujours pas $\overrightarrow{AB}$). On obtient ainsi $F_0 = A + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ et $G_0 = B + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, qui sont parallèles et disjoints.*