Examen 6L19 : Géométrie jeudi 16 juin 2011
9h00–12h00

Seuls les documents du cours sont admis.

Dans vous réponses vous pouvez utiliser tout résultat du cours (qu'on citera clairement), ainsi que les énoncés des questions précédentes.

On désignera par (AB) la droite passant par deux points distinct A, B, et (dans le cas d'un espace affine euclidien) par $d(A, B)$ la distance entre A et B.

Les parties sont indépendantes.

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme dans un plan affine $\mathcal{A}$. On utilisera dans cet exercice soit des coordonnées cartésiennes, soit des coordonnées barycentriques (vous pouvez choisir celles que vous préférez); dans le premier cas on se servira du repère cartésien $(A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}))$, dans le second cas du repère affine (A, B, D) correspondant.

a. Donner les coordonnées des sommets du parallélogramme, et décrire en coordonnées ses côtés ainsi que sa diagonale (AC).

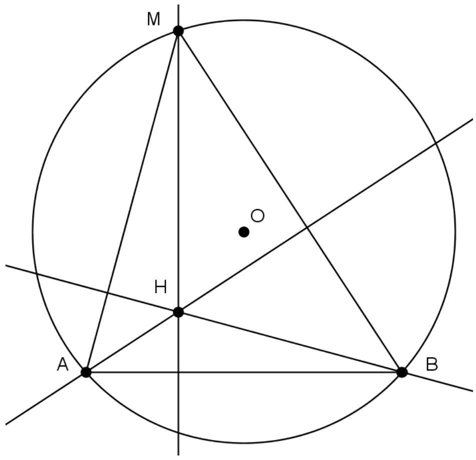
b. Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ des droites, avec $\mathcal{D}_1$ parallèle aux côtés (AB) et (CD) du parallélogramme et distinct d'eux, et avec $\mathcal{D}_2$ parallèle aux côtés (BC) et (AD) du parallélogramme et distinct d'eux. Décrire ces deux droites en coordonnées, où pour chacune la description comporte un paramètre qui correspond à la position (inconnue) de la droite. Quelles sont les valeurs possibles pour ces paramètres ?

c. Soit F, H les points intersection de $\mathcal{D}_1$ avec les côtés (AD) et (BC), respectivement, et G, E les points intersection de $\mathcal{D}_2$ avec les côtés (AB) et (CD), respectivement. Décrire les coordonnées de ces points, en termes des paramètres introduites dans la question précédente.

d. Décrire en coordonnées les droites (EF) et (GH) (toujours en termes des paramètres choisis).

e. Montrer que les droites (AC), (EF) et (GH) sont concourantes ou parallèles.

2. On donne dans le plan euclidien deux points distincts A et B situés sur un cercle Γ de centre O. On cherche le lieu de l'orthocentre H du triangle MAB, lorsque M décrit le cercle Γ privé de ces points A, B.



a. Soit C le milieu du segment $[AB]$ et G l'isobarycentre de MAB. Écrire G comme barycentre de A et C, et en déduire le rapport de l'homothétie h de centre G vérifiant $h(C) = M$.

b. Montrer que les hauteurs d'un triangle MAB sont les images par l'homothétie h des médiatrices de ce triangle. Qu'en déduit-on sur l'image du point O par h ?

c. En déduire que lorsque M décrit le cercle Γ, le vecteur $\overrightarrow{MH}$ est constant égal à $2\overrightarrow{OC}$.

d. Déterminer le lieu du point H lorsque M décrit le cercle Γ privé des points A, B.

e. Déterminer le lieu du symétrique de H par rapport à la droite (AB).

continué au verso

3. Dans cet exercice on se place dans le plan euclidien $\mathcal{P}$. Si Γ est un cercle du plan de centre Ω et de rayon $r > 0$, on appelle puissance d'un point M par rapport au cercle Γ la valeur $\Gamma(M) \stackrel{\text{def}}{=} \|\overrightarrow{P\Omega}\|^2 - r^2$.

a. Montrer que si A, A' sont deux points diamétralement opposés de Γ, alors $\Gamma(M) = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'} \rangle$ pour tout $M \in \mathcal{P}$.

b. Dans la situation de la question précédente on suppose maintenant $M \neq A$; soit B la projection orthogonale de A' sur (MA). Montrer que $(MA) \cap \Gamma = \{A, B\}$, et que $\Gamma(M) = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle$.

c. Déduire de la question précédente que si $\mathcal{D}$ est une droite telle que $\mathcal{D} \cap \Gamma = \{P, Q\}$, alors $\Gamma(M) = d(M, P)d(M, Q)$ pour tout $M \in \mathcal{D}$. Faut-il exclure la possibilité $P = Q$?

d. Soit maintenant $\mathcal{D}$ une droite quelconque de $\mathcal{P}$, un sous-espace euclidien de dimension 1 dans lequel on choisit un repère cartésien normé $\mathcal{R} = (O, \vec{v})$, c'est-à-dire $O \in \mathcal{D}$, et $\vec{v}$ est un vecteur unitaire de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$. Ainsi tout point $M \in \mathcal{D}$ s'écrit $M = (x)_{\mathcal{R}} = O + x\vec{v}$ avec $x \in \mathbf{R}$, et $d((x)_{\mathcal{R}}, (y)_{\mathcal{R}}) = |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels qu'on ait $\Gamma((x)_{\mathcal{R}}) = (x - a)^2 + b$, et décrire le point $(a)_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{D}$ où $\Gamma((x)_{\mathcal{R}})$ est minimal, et la valeur b.

e. Qu'est-ce qu'on peut dire des points éventuels $(x)_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{D}$ où $\Gamma((x)_{\mathcal{R}})$ s'annule ? En supposant que deux tels points $(p)_{\mathcal{R}}, (q)_{\mathcal{R}}$ existent (éventuellement confondus), décrire $\Gamma((x)_{\mathcal{R}})$ pour $x \in \mathbf{R}$ en termes de x, p, q (donc sans utiliser a, b), et retrouver le résultat de la question *c*.

f. Soit maintenant $\mathcal{R}' = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ un repère cartésien orthonormé du plan $\mathcal{P}$, donc tout pour $M \in \mathcal{P}$ s'écrit $M = (x, y)_{\mathcal{R}'} = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Pour quels $a_1, a_2, d \in \mathbf{R}$ a-t-on $\Gamma((x, y)_{\mathcal{R}'}) = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + d$? Interpréter, en termes de $\mathcal{R}'$ et Γ, le terme constant $c = a_1^2 + a_2^2 + d$ de cette expression (pour lequel on a donc $\Gamma((x, y)_{\mathcal{R}'}) = x^2 + y^2 - 2xa_1 - 2ya_2 + c$).

g. Soit maintenant Δ un autre cercle du plan $\mathcal{P}$, de centre $\Omega' \neq \Omega$ et de rayon $s > 0$. Utiliser l'expression analytique de $\Gamma((x, y)_{\mathcal{R}'})$ de la question précédente pour montrer que la fonction $\mathcal{P} \to \mathbf{R}$ qui envoie $M \mapsto \Gamma(M) - \Delta(M)$ est une application affine et non constante.

h. L'axe radical de Γ et Δ est défini comme $\{\, M \in \mathcal{P} \mid \Gamma(M) = \Delta(M) \,\}$. Montrer que cet axe est une droite orthogonale à $(\Omega\Omega')$.

i. Décrire l'axe radical de Γ et Δ dans tous les cas où $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.

j. Montrer que pour trois cercles du plan dont les centres ne son pas alignés, leurs trois axes radicaux sont concourants. Interpréter ce résultat lorsque les cercles se rencontrent mutuellement.

Fin.