Université de Poitiers Année 2009/2010

6L19 : Devoir de géométrie
À rendre au plus tard le 1er avril 2010

Question préliminaire. Soit $\mathcal{A}$ un espace affine euclidien orienté de dimension finie n et de direction $\overrightarrow{\mathcal{A}}$. Soient $\mathbf{b}$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ et $\mathbf{b}'$ une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$. Montrer :

$\det_{\mathbf{b}}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}) = +\det_{\mathbf{b}'}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})$ si $\mathbf{b}'$ est directe ;

$\det_{\mathbf{b}}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}) = -\det_{\mathbf{b}'}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})$ si $\mathbf{b}'$ est indirecte.

La quantité $\det_{\mathbf{b}}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})$ ne dépend donc pas de la base orthornormée directe $\mathbf{b}$ de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ choisie ; on notera cette quantité $\mathrm{Det}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})$. En outre, la quantité $\left|\mathrm{Det}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})\right|$ ne dépend pas du choix d'une base orthornormée de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère affine orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. La distance entre deux points A et B de $\mathcal{E}$ est notée AB, d'où $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$. Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$, on note $\mathcal{D}_{(A,B)}$ la droite passant par A et B et $[AB]$ le segment d'extrémités A et B.

Si $ABCD$ est un parallélogramme, i.e. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, contenu dans un plan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ on définit son *aire* par :

$$\text{aire}(ABCD) = \left|\mathrm{Det}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\right| \tag{1}$$

L'*aire* du triangle BCD est définie par :

$$\text{aire}(BCD) = \frac{1}{2}\text{aire}(ABCD) \tag{2}$$

Si A, B, C, D sont quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$, on appelle *tétraèdre* de sommets A, B, C, D l'enveloppe convexe de ces quatres points, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de poids positifs ou nuls. Les *arêtes* d'un tétraèdre $ABCD$ sont les segments d'extrémités deux sommets.

Le *volume* vol$(ABCD)$ d'un tétraèdre $ABCD$ est défini par :

$$\text{vol}(ABCD) = \frac{1}{6}\left|\mathrm{Det}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right| \tag{3}$$

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$. On note T le tétraèdre de sommets A, B, C, D et V son volume.

1. Soit H_A le projeté orthogonal de A sur le plan passant par B, C et D. Montrer à l'aide de (1), (2) et (3), la relation :

$$V = \mathrm{vol}(ABCD) = \frac{1}{3} AH_A \times \mathrm{aire}(BCD)$$

2. Soit λ un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et soit F le barycentre des points pondérés (A, λ) et $(H_A, 1-\lambda)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par F et perpendiculaire à $\mathcal{D}_{(A,H_A)}$. On note I_B le barycentre des points pondérés (A, λ) et $(B, 1-\lambda)$, I_C le barycentre des points pondérés (A, λ) et $(C, 1-\lambda)$, et I_D le barycentre des points pondérés (A, λ) et $(D, 1-\lambda)$.

a) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ coupe les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ en les points I_B, I_C et I_D respectivement.

L'intersection du tétraèdre T et du demi-espace limité par $\mathcal{P}$ et contenant A est le tétraèdre $AI_BI_CI_D$. Soit v_λ le volume de ce tétraèdre.

b) Déterminer la valeur de λ pour laquelle $v_\lambda = \dfrac{V}{8}$. *(Indication : on pourra exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI_B}$, $\overrightarrow{AI_C}$ et $\overrightarrow{AI_D}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ respectivement.)*

3. Montrer qu'il existe un unique couple de points (K, L) tel que $K \in \mathcal{D}_{(A,B)}$, $L \in \mathcal{D}_{(C,D)}$ et $\mathcal{D}_{(K,L)}$ est perpendiculaire aux droites $\mathcal{D}_{(A,B)}$ et $\mathcal{D}_{(C,D)}$.

4. Soit μ un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et soit G le barycentre des points pondérés (K, μ) et $(L, 1-\mu)$. Soit $\mathcal{Q}$ le plan passant par G et perpendiculaire à $\mathcal{D}_{(K,L)}$. On note J_{AC} le barycentre des points pondérés (A, μ) et $(C, 1-\mu)$, J_{AD} le barycentre des points pondérés (A, μ) et $(D, 1-\mu)$, J_{BC} le barycentre des points pondérés (B, μ) et $(C, 1-\mu)$ et J_{BD} le barycentre des points pondérés (B, μ) et $(D, 1-\mu)$.

a) Montrer que le plan $\mathcal{Q}$ coupe les arêtes $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$ et $[BD]$ en les points J_{AC}, J_{AD}, J_{BC} et J_{BD} respectivement.

b) Montrer que $J_{AC}J_{AD}J_{BC}J_{BD}$ forme un parallélogramme.

c) Exprimer l'aire du parallélogramme $J_{AC}J_{AD}J_{BC}J_{BD}$ en fonction de l'aire W d'un parallélogramme $J_1J_2J_3J_4$ tel que $\overrightarrow{J_1J_2} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{J_2J_3} = \overrightarrow{CD}$.

d) Exprimer le volume V du tétraèdre $T = ABCD$ en fonction de W et de la distance KL.