Contrôle continu 6L19 : Géométrie 1er mars 2009
10h00–12h00

Les documents sont admis. On peut utiliser tout résultat énoncé dans le cours, à condition que cette utilisation soit clairement mentionnée.

Les deux parties sont indépendantes.

1. Dans cet exercice, $\mathcal{A}$ désigne un espace affine réel de dimension 3.

a. Soit $\mathcal{R} = \big(O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})\big)$ un repère cartésien de $\mathcal{A}$. Si M est un point de $\mathcal{A}$, on note x_M, y_M, z_M ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$, de sorte que $M = (x_M, y_M, z_M)_{\mathcal{R}}$. Pour tout quadruplet de points (M, N, P, Q) de $\mathcal{A}$, montrer l'équivalence :

$$(M,N,P,Q) \text{ sont coplanaires} \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_M & x_N & x_P & x_Q \\ y_M & y_N & y_P & y_Q \\ z_M & z_N & z_P & z_Q \end{vmatrix} = 0$$

b. Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de $\mathcal{A}$, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des nombres réels, tous différents de -1. Les points E, F, G, H de $\mathcal{A}$ sont définis par :

$$E = \mathrm{bar}\big((A,1),(B,\alpha)\big)$$
$$F = \mathrm{bar}\big((B,1),(C,\beta)\big)$$
$$G = \mathrm{bar}\big((C,1),(D,\gamma)\big)$$
$$H = \mathrm{bar}\big((D,1),(A,\delta)\big)$$

Exprimer les coordonnées de A, B, C, D et E, F, G, H dans un repère cartésien de $\mathcal{A}$ bien choisi.

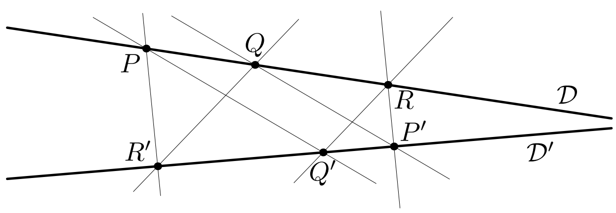
c. Déduire des questions *a* et *b* une condition nécessaire et suffisante pour que les points E, F, G, H soient coplanaires.

d. Trouver des équations en coordonnées cartésiennes, par rapport au repère cartésien choisi à la question *b*, des plans affines $\mathrm{Aff}(E, C, D)$, $\mathrm{Aff}(F, D, A)$, $\mathrm{Aff}(G, A, B)$, et $\mathrm{Aff}(H, B, C)$.

e. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ces quatre plans affines aient au moins un point en commun.

2. Dans cette partie on démontrera le théorème de Pappus, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème de Pappus. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un espace affine $\mathcal{A}$, et des points $P, Q, R \in \mathcal{D}$ et $P', Q', R' \in \mathcal{D}'$ sur ces deux droites (dans le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent, ces points sont supposés tous distincts du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$). Si $\mathcal{D}_{P,Q'}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{Q,P'}$, et $\mathcal{D}_{P,R'}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{R,P'}$, alors $\mathcal{D}_{Q,R'}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{R,Q'}$.*



a. Montrer le théorème dans le cas où $\dim \mathcal{A} = 2$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

b. Montrer le théorème dans le cas où $\dim \mathcal{A} = 2$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point S. [Indication: on pourra utiliser le théorème de Thalès.]

c. On suppose dans cette question que $\dim \mathcal{A}$ est quelconque, et que les points P, Q, R ne sont pas tous égaux. Déduire alors des hypothèses $\mathcal{D}_{P,Q'} \parallel \mathcal{D}_{Q,P'}$ et $\mathcal{D}_{P,R'} \parallel \mathcal{D}_{R,P'}$ que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

d. En déduire le théorème de Pappus dans le cas général.

Fin.