Corrigé Contrôle continu 6L19 : Géométrie 4 mars 2009

8h15–10h15

1. Soit A, B, C trois points non alignés dans un plan affine $\mathcal{A}$. On munit $\mathcal{A}$ de ce repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$, de sorte que chaque point de $\mathcal{A}$ puisse être écrit en coordonnées barycentriques sous la forme $(x, y, z)_\mathcal{S}$ avec $x + y + z = 1$, et chaque vecteur dans $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ sous la forme $v(s, t, u)_\mathcal{S}$ avec $s + t + u = 0$. On rappelle aussi la notation $[\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S}$ (avec α, β, γ pas tous égaux) pour la droite $\{\, (x, y, z)_\mathcal{S} \mid x + y + z = 1, \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \,\}$.

On choisit des points $a \in \mathcal{D}_{B,C}$, $b \in \mathcal{D}_{C,A}$ et $c \in \mathcal{D}_{A,B}$, qu'on supposera chacun distinct des points A, B, et C.

a. Expliquer pourquoi on peut exprimer ces points en coordonnées barycentriques en fonction de trois variables λ, μ, ν comme

$$a = (0, \lambda, 1 - \lambda)_\mathcal{S},$$
$$b = (1 - \mu, 0, \mu)_\mathcal{S},$$
$$c = (\nu, 1 - \nu, 0)_\mathcal{S},$$

et indiquer quelles sont les valeurs interdites pour λ, μ, et ν.

$\surd$ *Pour 2 points distincts P, Q, la droite $\mathcal{D}_{P,Q}$ est égal à l'ensemble des barycentres* $\mathrm{bar}((P, x), (Q, y))$ *avec $x+y = 1$, c'est-à-dire $y = x-1$, et pour les points P, Q eux même on aura $x = 1$ respectivement $x = 0$. Or pour tout point R ce barycentre s'écrit aussi* $\mathrm{bar}((P, x), (Q, 1-x), (R, 0))$. *Compte tenu du fait que par définition $(x, y, z)_\mathcal{S} = \mathrm{bar}((A, x), (B, y), (C, z))$, les formules données pour a , b et c sont des cas particuliers de cette écriture, avec chaque fois P, Q, R une permutation adaptée des points A, B, C, et les valeurs* 0 *et* 1 *sont interdites pour λ, μ, et ν.*

b. Exprimer les droites $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$ et $\mathcal{D}_{C,c}$ en coordonnées sous la forme $[\cdot, \cdot, \cdot]_\mathcal{S}$.

$\surd$ *Pour deux points distincts $X = (x_1, x_2, x_3)_\mathcal{S}$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)_\mathcal{S}$ on a $\mathcal{D}_{X,Y} = [x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1]_\mathcal{S}$. Comme $A = (1, 0, 0)_\mathcal{S}$, on a $\mathcal{D}_{A,a} = [0, \lambda-1, \lambda]_\mathcal{S}$, et de façon similaire on a $\mathcal{D}_{B,b} = [\mu, 0, \mu-1]_\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}_{C,c} = [\nu-1, \nu, 0]_\mathcal{S}$ (ces résultats peuvent aussi être obtenus multipliés par un facteur commun non nul, un facteur -1 étant le plus probable).*

c. Exprimer également les droites $\mathcal{D}_{b,c}$, $\mathcal{D}_{c,a}$, et $\mathcal{D}_{a,b}$ sous cette forme.

$\surd$ *Toujours en utilisant la même formule, on trouve $\mathcal{D}_{b,c} = [\mu(\nu - 1), \mu\nu, (1 - \mu)(1 - \nu)]_\mathcal{S}$, $\mathcal{D}_{c,a} = [(1 - \nu)(1 - \lambda), \nu(\lambda - 1), \nu\lambda]_\mathcal{S}$, et $\mathcal{D}_{a,b} = [\lambda\mu, (1 - \lambda)(1 - \mu), \lambda(\mu - 1)]_\mathcal{S}$*

2. On supposera dans la suite que a, b et c ne sont pas alignés (donc $\mathcal{D}_{b,c}$, $\mathcal{D}_{c,a}$, et $\mathcal{D}_{a,b}$ sont distinctes), et en plus que $\mathcal{D}_{b,c}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{D}_{B,C}$, ni $\mathcal{D}_{c,a}$ parallèle à $\mathcal{D}_{C,A}$, ni $\mathcal{D}_{a,b}$ parallèle à $\mathcal{D}_{A,B}$.

a. Montrer que deux droites $[\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S}$ et $[\alpha', \beta', \gamma']_\mathcal{S}$ sont parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

[Indication: un vecteur $v(s, t, u)_\mathcal{S}$ est dans la direction de la droite $[\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S}$ si et seulement si $\alpha s + \beta t + \gamma u = 0$; on peut alors donner un système d'équations exprimant qu'un vecteur est à la fois dans les directions des deux droites.]

$\surd$ *Un vecteur $v(s, t, u)_\mathcal{S}$ qui est à la fois dans la direction de $[\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S}$ et de $[\alpha', \beta', \gamma']_\mathcal{S}$ vérifie le système d'équations homogènes*

$$\begin{aligned} s + \quad t + \quad u &= 0 \\ \alpha\, s + \beta\, t + \gamma\, u &= 0 \\ \alpha' s + \beta' t + \gamma' u &= 0 \end{aligned}$$

et ce système admet des solutions non nulles (autrement dit il existe des vecteurs non nuls dans les directions des deux droites, qui seront donc parallèles) si et seulement si le système n'est pas de Cramer, c'est-à-dire si le déterminant des coefficients des premiers membres est nul. [Ceux qui ont dit que le système est vérifié si et seulement si le déterminant est nul n'ont pas compris la situation. Cette affirmation est absurde, car le système donne des conditions pour s, t, u, quelles inconnues ne figurent même pas dans le déterminant !]

b. Appliquer cette formule aux droites $\mathcal{D}_{b,c}$, $\mathcal{D}_{c,a}$, et $\mathcal{D}_{a,b}$ pour exprimer en termes de λ, μ, ν les hypothèses données de non-parallélisme avec respectivement $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{C,A}$, et $\mathcal{D}_{A,B}$.

$\surd$ *La condition exprimant que $\mathcal{D}_{b,c}$ (calculé ci-dessus) n'est pas parallèle à $\mathcal{D}_{B,C} = [1,0,0]_{\mathcal{S}}$ est*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu(\nu-1) & \mu\nu & (1-\mu)(1-\nu) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \iff (1-\mu)(1-\nu) - \mu\nu \neq 0 \iff \mu + \nu \neq 1.$$

De façon similaire $\mathcal{D}_{c,a}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{D}_{C,A}$ si et seulement si $\nu + \lambda \neq 1$, et $\mathcal{D}_{a,b}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{D}_{A,B}$ si $\lambda + \mu \neq 1$.

Si deux droites ne sont pas parallèles, on admettra la formule suivante (donnée dans le cours) pour leur point d'intersection : $[\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{S}} \cap [\alpha', \beta', \gamma']_{\mathcal{S}} = \{\frac{1}{d}(\beta\gamma' - \gamma\beta', \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \alpha\beta' - \beta\alpha')_{\mathcal{S}}\}$, où $d = \beta\gamma' - \gamma\beta' + \gamma\alpha' - \alpha\gamma' + \alpha\beta' - \beta\alpha'$ est égal au déterminant mentionné ci-dessus (par conséquent, le facteur $\frac{1}{d}$ rend la somme des coordonnées égale à 1).

c. Exprimer en coordonnées barycentriques le point d'intersection P de $\mathcal{D}_{B,C}$ et $\mathcal{D}_{b,c}$, ainsi que le point d'intersection Q de $\mathcal{D}_{C,A}$ et $\mathcal{D}_{c,a}$ et le point d'intersection R de $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{a,b}$.

$\surd$ *D'après la formule donnée et les coordonnées des droites concernées on a*

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1-\mu-\nu}\big(0, (1-\mu)(1-\nu), -\mu\nu\big)_{\mathcal{S}}, \\ Q &= \frac{1}{1-\nu-\lambda}\big(-\nu\lambda, 0, (1-\nu)(1-\lambda)\big)_{\mathcal{S}}, \\ R &= \frac{1}{1-\lambda-\mu}\big((1-\lambda)(1-\mu), -\lambda\mu, 0\big)_{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

3. Dans la situation ci-dessus, on souhaite démontrer l'énoncé suivant (un cas particulier du théorème de Desargues) : Les droites $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$ et $\mathcal{D}_{C,c}$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si les points P, Q, R sont alignés.

a. Exprimer la condition que les droites $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$ et $\mathcal{D}_{C,c}$ sont concourantes ou parallèles en termes de λ, μ, ν.

$\surd$ *La condition est*

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & \lambda \\ \mu & 0 & \mu-1 \\ \nu-1 & \nu & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1) + \lambda\mu\nu = 0 \iff (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = \lambda\mu\nu$$

b. Exprimer la condition que les points P, Q, R sont alignés en termes de λ, μ, ν.

$\surd$ *On peut ignorer les facteurs comme $\frac{1}{1-\mu-\nu}$, qui sont non nuls, donc la condition est*

$$\begin{vmatrix} 0 & (1-\mu)(1-\nu) & -\mu\nu \\ -\nu\lambda & 0 & (1-\nu)(1-\lambda) \\ (1-\lambda)(1-\mu) & -\lambda\mu & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2(1-\mu)^2(1-\nu)^2 = \lambda^2\mu^2\nu^2$$

c. Montrer l'équivalence des conditions des deux points précédents, sous l'hypothèse (déjà donnée ci-dessus) que a, b et c ne sont pas alignés. [Indication : il est nécessaire d'utiliser cette hypothèse, car dans le cas contraire (si a, b et c étaient alignés) P, Q, R seraient alignés (sur la même droite que a, b et c), malgré le fait que $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$, et $\mathcal{D}_{C,c}$ ne sont ni concourantes ni parallèles.]

$\surd$ *Il est clair que la première condition implique la seconde, car les deux membres de l'équation sont élevés au carré. L'implication réciproque n'est pas valable en général : d'une équation $X^2 = Y^2$ on peut seulement déduire que soit $X = Y$ soit $X = -Y$ (car $X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$, qui s'annule seulement si l'un des deux facteurs s'annule). Ici, si l'équation du point b est vérifiée, alors soit celle du point a est vérifiée, soit on a l'équation opposée $(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = -\lambda\mu\nu$. Pour exclure cette dernière possibilité, on utilisera de l'hypothèse que a, b et c ne sont pas alignés. Cette hypothèse s'exprime par l'inéquation*

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1-\lambda \\ 1-\mu & 0 & \mu \\ \nu & 1-\nu & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \iff \lambda\mu\nu + (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) \neq 0,$$

ce qui dit précisément que la seconde possibilité $(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = -\lambda\mu\nu$ n'est pas réalisée. Étant donné cela, l'équation du point b entraîne celle du point a, et on a établi leur équivalence.

Fin.