Examen 6L19 : Géométrie 18 juin 2008
9h00–12h00

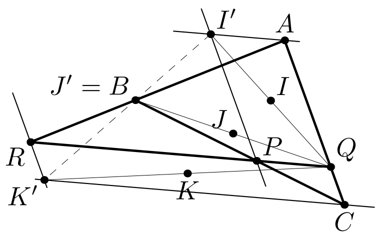
Les documents et calculatrices sont **interdits**

Les résultats énoncés dans le cours ou dans les TD peuvent être utilisés ; citez dans ce cas le résultat précis.

La partie 1 concerne la géométrie affine, tandis que la partie 2 concerne la géométrie euclidienne. Les deux parties sont indépendantes.

Dans (la partie 2 de) ce sujet tous les angles sont des angles *de droites*, notés $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}'})$ pour deux droites $\mathcal{D},\mathcal{D}'$. On rappelle que ces angles ne dépendent que de la direction (un espace vectoriel de dimension 1) de chacune des droites, et non pas d'un vecteur générateur de cet espace ; en particulier il est sans importance si l'une des droites est donnée comme $\mathcal{D}_{A,B}$ ou comme $\mathcal{D}_{B,A}$, et par conséquent on ne distingue pas entre l'angle plat et l'angle nul. En revanche l'ordre des deux droites est significatif : l'angle $(\widehat{\mathcal{D}',\mathcal{D}})$ est l'opposé de l'angle $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}'})$.

1. On a montré dans l'un des TD que si A,B,C est un triangle (donc A,B,C non alignés), et on choisit trois points *alignés* $P \in \mathcal{D}_{B,C}$, $Q \in \mathcal{D}_{A,C}$, et $R \in \mathcal{D}_{A,B}$, alors les milieux $I = \mathrm{bar}(A,P)$, $J = \mathrm{bar}(B,Q)$ et $K = \mathrm{bar}(C,R)$ sont aussi alignés (on dit que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés). Cela a été fait par un calcul en coordonnées barycentriques. On démontrera ici le même résultat de façon moins calculatoire en considérant certaines homothéties. On suppose que les points A,B,C,P,Q,R sont tous distincts (le cas contraire étant facile à traiter).



a. Soit $h_{Q,2}$ l'homothétie de centre Q et de rapport 2 ; on pose $I' = h_{Q,2}(I)$, $J' = h_{Q,2}(J)$, et $K' = h_{Q,2}(K)$. Pourquoi suffit-il de montrer que I', J' et K' sont alignés pour conclure que I, J, et K sont alignés ?

b. Montrer que $I' = A + \overrightarrow{QP}$, ainsi que $J' = B$ et $K' = C + \overrightarrow{QR}$.

c. Soit h_1 et h_2 les homothéties de centre B telles que $h_1(A) = R$ et $h_2(P) = C$. Expliquer que h_1 et h_2 sont bien définis, et vérifient $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

d. Montrer que h_1 envoie la droite $\mathcal{D}_{A,I'}$ sur $\mathcal{D}_{P,R}$ et $\mathcal{D}_{A,C}$ sur $\mathcal{D}_{R,K'}$, et que h_2 envoie $\mathcal{D}_{P,R}$ sur $\mathcal{D}_{C,K'}$ et $\mathcal{D}_{P,I'}$ sur $\mathcal{D}_{A,C}$. [Utiliser une propriété de l'image d'une droite par une homothétie.]

e. En déduire que la composée $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$ envoie le point I' vers K', et conclure.

2. Soit donné dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ trois droites $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3$ non concourantes et deux à deux non parallèles.

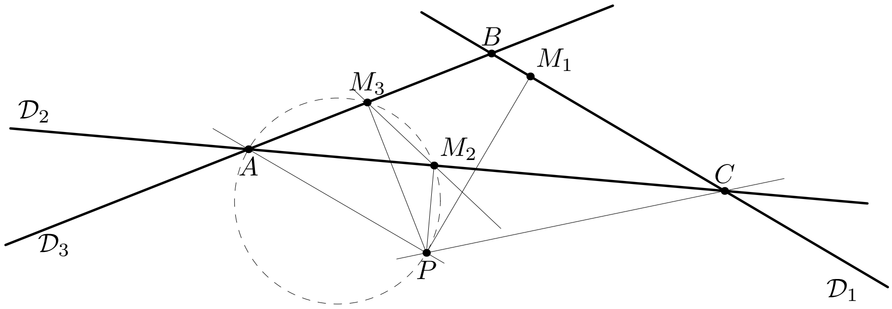
a. Montrer que les points d'intersection de ces droites forment un triangle A,B,C : il existe trois points A,B,C non alignés tels que $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \{A\}$, $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_1 = \{B\}$, et $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{C\}$.

b. Soit P un point avec $P \notin \mathcal{D}_2$ (donc en particulier $P \notin \{A,C\}$. Expliquer pourquoi on a l'égalité

$$(\widehat{\mathcal{D}_{A,P},\mathcal{D}_{P,C}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,A},\mathcal{D}_3}) + (\widehat{\mathcal{D}_3,\mathcal{D}_1}) + (\widehat{\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_{C,P}}).$$

c. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle A,B,C. Déduire du point précédent que $P \in \Gamma \setminus \{A,C\}$ si et seulement si $(\widehat{\mathcal{D}_{P,A},\mathcal{D}_3}) + (\widehat{\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_{C,P}}) = 0$ (où le « 0 » désigne l'angle nul de droites).

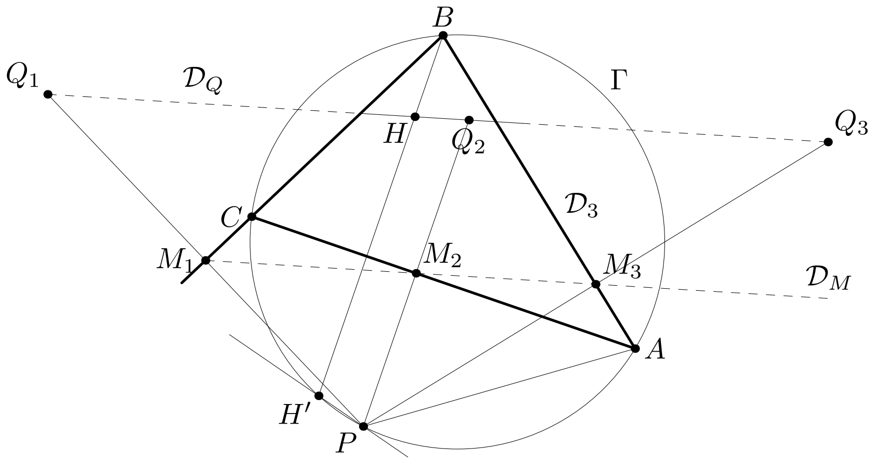
continué au verso



d. Pour $i = 1, 2, 3$ on désigne par M_i l'image de P par projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D}_i$. Montrer que M_2 et M_3 sont sur le cercle dont le segment $[P, A]$ forme un diamètre. En déduire que $(\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,M_3}})$ (les droites dans le second angle sont bien définies car $P \notin \mathcal{D}_2$ entraîne $P \neq M_2$, et $P \neq A$ entraîne $M_2 \neq M_3$).

e. Par un argument similaire (utilisant le segment $[P, C]$) on a aussi $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{P,C}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{M_1,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,P}})$ (l'admettre sans redonner une démonstration). Conclure que les points M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si $P \in \Gamma \setminus \{A, C\}$.

f. Pour $i = 1, 2, 3$ soit Q_i l'image de P par la réflexion orthogonale en $\mathcal{D}_i$. Expliquer que la condition « M_1, M_2, M_3 sont alignés » du point précédent équivaut à « Q_1, Q_2, Q_3 sont alignés ».



On suppose maintenant que $P \in \Gamma \setminus \{A, C\}$, de sorte que, par les arguments donnés, M_1, M_2, et M_3 sont alignés sur une droite qu'on appellera $\mathcal{D}_M$, et Q_1, Q_2, Q_3 sont alignés sur une droite $\mathcal{D}_Q$ (appelée « droite de Steiner » de P par rapport au triangle A, B, C). On rappelle que l'orthocentre H du triangle A, B, C est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle; on veut montrer que H est situé sur $\mathcal{D}_Q$. Quand $H = Q_2$ cela est évident, donc on supposera que $H \neq Q_2$.

g. Expliquer pourquoi il suffira de montrer que $\mathcal{D}_{Q_2,H}$ est parallèle à $\mathcal{D}_M$ (c'est-à-dire, montrer qui si $\mathcal{D}_{Q_2,H} \parallel \mathcal{D}_M$, alors $H \in \mathcal{D}_Q$).

h. On admettra que l'image H' de l'orthocentre H par la réflexion orthogonale en $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{A,C}$ est l'un des deux points d'intersection de la hauteur issue de B du triangle A, B, C et son cercle circonscrit Γ (l'autre point d'intersection étant B). Montrer les égalités

$$(\widehat{\mathcal{D}_{P,Q_2}, \mathcal{D}_{Q_2,H}}) = -(\widehat{\mathcal{D}_{Q_2,P}, \mathcal{D}_{P,H'}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,H'}, \mathcal{D}_{H',B}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3})$$

et conclure (en utilisant la question *d*) que $\mathcal{D}_{Q_2,H} \parallel \mathcal{D}_M$. [Chacune des égalités se justifie par un argument simple, tel que l'application d'une isométrie ou une cocyclicité, qu'on spécifiera.]

i. Par la construction ci-dessus, chaque point $P \in \Gamma$ détermine sa droite de Steiner $\mathcal{D}_Q$, qui passe par H (pour le raisonnement on a dû exclure les cas isolés $P = A$ et $P = C$, mais même pour ces cas la construction marche si l'on permute les rôles des points A, B, C). Montrer que réciproquement la droite de Steiner détermine P (c'est-à-dire indiquer comment à partir d'une droite $\mathcal{D}_Q$ passant par H, sans connaître ses points Q_1, Q_2, Q_3 ou d'autres données qui dépendent du choix de P, on peut retrouver géométriquement le point $P \in \Gamma$).

Fin.