Examen 3L05 : Algèbre Multilinéaire 17 décembre 2010
9h–12h

Les documents ne sont pas autorisés. Les parties sont indépendantes. Les faits énoncés dans une question peuvent être utilisés dans les questions suivantes, que vous les ayez démontrés ou non.

Quand une question nécessite la résolution d'un système d'équations linéaires, il suffira d'en donner la solution, sans sa dérivation complète.

Si φ est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E, on notera $\mathrm{subs}_\varphi : K[X] \to \mathrm{End}(E)$ le morphisme d'anneaux qui consiste à substituer φ pour X : $\sum_{i=0}^d c_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^d c_i \varphi^i$ (ailleurs cette opération est souvent notée $P(X) \mapsto P(\varphi)$). En particulier $\mathrm{subs}_\varphi(c) = c\varphi^0 = c\,\mathrm{id}_E$ pour un polynôme constant $c \in K$.

On utilisera comme définition du polynôme caractéristique la formule $\chi_A = \det(XI_n - A)$ (et non pas $\det(A - XI_n)$), de sorte qu'il soit toujours unitaire.

1. On fixe un corps K, un K-espace vectoriel E de dimension finie n, un endomorphisme $\varphi \in \mathrm{End}(E)$.

a. On choisit un vecteur $v_0 \in E$, et définit des vecteurs v_i pour tout entier $i > 0$ de façon récurrente par $v_i = \varphi(v_{i-1})$. Comme, en vue de leur nombre plus grand que la dimension n, les vecteurs v_i ne peuvent pas être tous linéairement indépendants, il existe une relation de dépendance linéaire $c_0 v_0 + \cdots + c_d v_d = 0$ entre les vecteurs $(v_0, \ldots, v_d)$ (avec $d \in \mathbf{N}$ et $c_0, \ldots, c_d \in K$ pas tous nuls). Montrer qu'on a également $c_0 v_{0+k} + \cdots + c_d v_{d+k} = 0$ pour tout $k > 0$.

b. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_0, v_1, \ldots) \subseteq E$. Déduire de la question précédente que si $P \in K[X]$ vérifie $\mathrm{subs}_\varphi(P)(v_0) = 0 \in E$, alors la restriction de $\mathrm{subs}_\varphi(P)$ à F est entièrement nulle.

c. Soit maintenant $P = c_0 X^0 + \cdots + c_{n-1} X^{n-1} + X^n \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n, et supposons que la matrice de φ par rapport à une certaine base $\mathcal{E}$ de E soit égale à la matrice compagnon de P:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) = C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En choisissant de façon convenable $v_0 \in E$, montrer que le polynôme minimal de φ et le polynôme caractéristique de φ sont tous les deux égaux à P.

d. On spécialise dans la situation de la question précédente $K = \mathbf{R}$, $n = 4$, $E = \mathbf{R}^4$ avec $\mathcal{E}$ sa base canonique, et $P = 1 - X - X^3 + X^4$. Donc en particulier

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) = C_{1-X-X^3+X^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\lambda = 1$ est l'unique valeur propre de φ, et trouver sa multiplicité algébrique (c'est-à-dire, comme racine du polynôme caractéristique).

e. Calculer, pour la valeur propre $\lambda = 1$, l'espace propre (c'est-à-dire trouver une base de ce sous-espace), ainsi que l'espace caractéristique (espace propre généralisé), qu'on appellera F_λ.

f. Soit Q le quotient de P par $(X-1)^m$, où m est maximal pour que la division soit exacte (sans reste). Donner un argument sans calcul qui montre que $E = F_\lambda \oplus F'$ avec $F' = \mathrm{Ker}(\mathrm{subs}_\varphi(Q))$.

g. Calculer F' explicitement, et vérifier que l'espace trouvé est en somme directe avec F_λ.

h. Pour les polynômes Q et $(X-1)^m$ de la question *f*, trouver des coefficients de Bézout, c'est-à-dire des polynômes $S, T \in K[X]$ tels que $SQ + T(X-1)^m = 1 \in K[X]$.

i. Montrer que les endomorphismes $\mathrm{subs}_\varphi(SQ)$ et $\mathrm{subs}_\varphi(T(X-1)^m)$ sont les projections de E selon la somme directe $E = F_\lambda \oplus F'$, et calculer leurs matrices dans $\mathcal{E}$.

continué au verso

j. Donner une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ soit de la forme en blocs $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ où A et B sont des matrices carrées 2×2 qu'on précisera, avec en plus A triangulaire supérieure et B une matrice compagnon (d'un polynôme unitaire de degré 2). [Indication: on pourra considérer le polynôme caractéristique de $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ en relation avec les polynômes caractéristiques de A et de B.]

2. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{E}$, et $f \in \mathrm{End}(E)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 12 & -30 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f est diagonalisable, et expliciter une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation et la forme diagonale $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sur cette base.

b. On considère le problème de trouver les $g \in \mathrm{End}(E)$ tels que $g^3 = f$. Montrer que pour un tel g, s'il existe, tout espace propre de f sera g-stable.

c. Qu'est-ce que cela entraîne pour la forme de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$? Trouver les solutions g de $g^3 = f$ en donnant leurs matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ (on ne demande pas de les exprimer dans la base $\mathcal{E}$).

3. Soit E l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ (c'est-à-dire indéfiniment dérivables $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$) qui vérifient l'équation différentielle homogène

$$f''' + f' + 10f = 0;$$

c'est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel (on l'admet).

a. Montrer que si $f \in E$ alors aussi $f' \in E$.

On peut donc considérer l'endomorphisme $D \in \mathrm{End}(E)$ défini par $D : f \mapsto f'$.

b. Donner une équation en $\lambda \in \mathbf{C}$ qui est vérifiée si et seulement si la fonction exponentielle $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ appartient à E. Montrer que dans ce cas f_λ est un vecteur propre de D pour λ.

c. Montrer qui si un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$ (donc à coefficients entiers) possède une racine dans $\mathbf{Z}$, alors cette racine divise nécessairement (dans $\mathbf{Z}$) le coefficient constant (c'est-à-dire de X^0) de P.

d. Trouver les solutions entières $\lambda \in \mathbf{Z}$ de l'équation de la question *b*, et en déduire toutes les solutions dans $\mathbf{C}$.

e. Trouver le polynôme minimal P de D, et en déduire si D est diagonalisable on non.

En analyse on établit que toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, vérifiant l'équation $f' = \lambda f$ est un multiple scalaire de la fonction exponentielle indiquée dans la question *b*. On admet ici ce résultat; autrement dit, on admet que les espaces propres de D sont de dimension 1.

f. Déterminer $\dim(E)$. Quel est le polynôme caractéristique de D ?

g. Spécifier trois fonctions $g_1, g_2, g_3 \in E$ qui sont linéairement indépendantes, et qui sont à valeurs *réelles* (donc $g_i(x) \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$). Qu'est-ce qu'on peut en déduire concernant les solutions de la même équation différentielle $f''' + f' + 10f = 0$ dans l'ensemble $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions réelles et indéfiniment dérivables (quel ensemble est en fait un $\mathbf{R}$-espace vectoriel) ?

Fin.