

Courbes algébriques planes

Aviva SZPIRGLAS ¹

26 mars 2010

¹ UMR CNRS 6086, Université de Poitiers, Mathématiques, Bd Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962–Futuroscope Chasseneuil Cedex.

Table des matières

1	Méthodes algébriques pour les courbes planes	5
1.1	Polynômes	5
1.2	Courbes algébriques planes, projectives ou affines	13
1.2.1	Décomposition en composantes irréductibles	13
1.2.2	Intersection d'une courbe avec une droite	14
1.2.3	Points singuliers d'une courbe algébrique plane	15
1.2.4	Équation de la tangente à une courbe algébrique plane en un point	17
1.3	Intersection de courbes planes. Théorème de Bézout	17
1.3.1	Intersection de deux courbes algébriques projectives planes	18
1.3.2	Multiplicité d'intersection de deux courbes algébriques projectives planes	18
1.3.3	Théorème de Bézout	28
1.3.4	Applications du théorème de Bézout	32
2	Théorème de Newton-Puiseux	35
2.1	Introduction	35
2.1.1	Le problème « à l'envers »	35
2.1.2	Le théorème de Newton-Puiseux	35
2.2	Existence d'une solution de (\star) série formelle dite de Puiseux	36
2.2.1	Support, Polygone de Newton	36
2.2.2	Premier pas	36
2.2.3	Quelques exemples	38
2.3	Existence d'une solution de (\star) série convergente	40
2.4	Fin de la preuve du théorème de Newton-Puiseux	41
2.4.1	f est irréductible	41
2.4.2	f n'est pas irréductible	41
2.4.3	Retrouver f à partir d'une série de Puiseux	42
2.5	Résolution des singularités de courbe plane	42
2.6	Développement de Puiseux d'une courbe réductible	42
2.6.1	Les paires caractéristiques	42
2.6.2	Les exposants de coïncidence	43
3	Résolution des singularités par éclatement	45
3.1	Introduction	45
3.2	Éclatement de $O \in \mathbb{C}^2$	46
3.3	Généralisation	46
3.4	Exemples	47
3.4.1	Exemple 1	47

3.4.2	Exemple 2	48
3.4.3	Exemple 3	49
3.5	Un cas particulier : $f(x_0, x_1) = x_0^p - x_1^q$	51
3.5.1	Sur le développement des rationnels en fraction continue	51
3.5.2	L'arbre de désingularisation de $x^p - y^q$ en \mathcal{O}	52
3.6	Arbre de désingularisation d'une branche irréductible donnée par son développement de Puiseux	63
3.6.1	Suite des multiplicités	63
3.6.2	Suite des multiplicités et développement de Puiseux	63
3.6.3	Développement de Puiseux et arbre de désingularisation	65
3.7	Arbre de désingularisation d'une courbe réductible à deux branches	65
3.7.1	Cas où l'exposant de coïncidence est un exposant permis pour les deux branches	65

Bibliographie

67

Chapitre 1

Méthodes algébriques pour les courbes planes

Pour l'étude des courbes planes (c'est-à-dire des hypersurfaces de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$), on utilise des méthodes algébriques. C'est pourquoi nous commençons par faire ici quelques rappels d'algèbre.

1.1 Polynômes

Notation 1.1.1 Le degré d'un polynôme à n indéterminées X_1, \dots, X_n par rapport à la variable X_i est noté $\partial_{X_i}^\circ P$, le degré total est noté $\partial^\circ P$.

Définition 1.1.2 Un anneau intègre commutatif (unitaire) est factoriel si tout élément non nul se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs et aux inversibles près en un produit d'éléments irréductibles.

Exemple 1.1.3 L'anneau \mathbb{Z} des entiers relatifs, l'anneau $k[X]$ (où k est un corps commutatif), tout anneau principal, sont factoriels.

Avant de passer au théorème 1.1.5, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.4 Les éléments irréductibles de $A[X]$ sont

- i les éléments irréductibles de A , vus comme polynômes constants;
- ii les éléments non constants de $A[X]$ qui sont des éléments irréductibles de $K[X]$ tels que le p.g.c.d. de leurs coefficients est égal à 1.

Preuve du lemme. Montrons d'abord que si $P \in A[X]$ est un élément irréductible non constant de $A[X]$, alors, il est irréductible dans $K[X]$ et le p.g.c.d. de ses coefficients est égal à 1 (à inversible près).

1. Si $P \in A[X]$ est un élément irréductible non constant de $A[X]$, alors le p.g.c.d. de ses coefficients est égal à 1 (à inversible près).

Soit d ce p.g.c.d. ; alors on peut écrire $P = dP_1$ et puisque P est irréductible dans $A[X]$, soit d , soit P_1 , est inversible dans $A[X]$. Les seuls inversibles de $A[X]$ sont les éléments de A^\times , le groupe des inversibles de A . Donc, car P est non constant, d est inversible, ce qui implique que d est égal à 1, à inversible près.

2. Si $P \in A[X]$ est un élément irréductible non constant de $A[X]$, alors, il est irréductible dans $K[X]$.

Supposons que $P = P_1P_2$ dans $K[X]$; soit d le p.p.c.m. de l'ensemble des dénominateurs des coefficients de P_1 et P_2 (écrits sous forme irréductible). Alors, $d^2P = Q_1Q_2$, où Q_1 et Q_2 sont à coefficients dans A . On peut décomposer, pour $i = 1, 2$, Q_i en le produit d_iR_i , où R_i est dans $A[X]$ et est tel que le p.g.c.d. de ses coefficients est 1 (à inversible de A près). On a donc $d^2P = d_1d_2R_1R_2$. Maintenant, le p.g.c.d. des coefficients du produit R_1R_2 est aussi égal à 1 (à inversible de A près) : en effet, si $q \in A$ est un irréductible de A , A/qA est un anneau intègre (car $\langle q \rangle$ est un idéal premier), et $\overline{R_i}$, image de R_i dans $(A/qA)[X]$ (pour $i = 1, 2$) est un polynôme non nul de $(A/qA)[X]$, car en effet affirmer que tous les coefficients de R_i sont divisibles par q

contredit le fait que l'ensemble de ces coefficients a pour p.g.c.d. 1. Donc, $\overline{R_1 R_2}$ est non nul et nécessairement l'un de ses coefficients est non nul. Ce qui prouve qu'au moins l'un des coefficients de $R_1 R_2$ n'est pas divisible par q . Ceci est vrai pour tout irréductible q de A , ce qui prouve que le p.g.c.d. des coefficients du produit $R_1 R_2$ est égal à 1. Donc, puisque P est irréductible dans $A[X]$, le p.g.c.d. de ses coefficients est 1 et $d^2 = d_1 d_2$ (à inversible de A près). On a donc $P = R_1 R_2$ à inversible près dans $A[X]$. Puisque P est un irréductible de $A[X]$ par hypothèse, soit R_1 , soit R_2 est inversible dans $A[X]$, donc par exemple $R_1 = a \in A^\times$ et $P_1 = da \in K^*$ est inversible dans $K[X]$, ce qui implique que P est irréductible dans $K[X]$.

Ceci termine la preuve du lemme, car il est clair d'une part que si $P \in A[X]$ est réductible dans $A[X]$, bien que le p.g.c.d. de ses coefficients soit 1 (ou inversible), il l'est *a fortiori* dans $K[X]$, d'autre part que si le p.g.c.d. des coefficients de P n'est pas inversible, on peut le mettre en facteur dans P , ce qui prouve que P n'est pas irréductible dans $A[X]$ ■

Théorème 1.1.5 *Un anneau A est factoriel, si, et seulement si, $A[X]$ est un anneau factoriel.*

Preuve. Supposons que $A[X]$ est un anneau factoriel; alors, les éléments de A , qui sont des polynômes constants, se décomposent de manière unique en produit de facteurs irréductibles dans $A[X]$. Pour des raisons de degré, ces facteurs irréductibles ne peuvent être que des polynômes constants, donc, en fait, des irréductibles de A . On obtient donc pour tout élément de A une décomposition en produit de facteurs irréductibles de A , qui est unique puisqu'il s'agit aussi de la décomposition dans $A[X]$ du polynôme constant associé.

Réciproquement, supposons que A est factoriel; soit K le corps des fractions de A .

Soit $P \in A[X] \subset K[X]$; on écrit la décomposition de P en facteurs irréductibles de $K[X]$ (qui est lui-même factoriel). On a donc $P = P_1 P_2 \dots P_s$; soit d le p.p.c.m. des dénominateurs des coefficients des P_i (qui sont des éléments de K qu'on écrit sous forme irréductible). Alors $d^s P = Q_1 Q_2 \dots Q_s$, avec $Q_i \in A[X]$ et Q_i est irréductible dans $K[X]$ pour $i = 1, 2, \dots, s$. Soit d_i , pour $i = 1, 2, \dots, s$, le p.g.c.d. des coefficients de Q_i . On déduit de ce qui précède que $d^s P = d_1 d_2 \dots d_s R_1 R_2 \dots R_s$, où pour $i = 1, 2, \dots, s$ les $R_i \in A[X]$, sont des irréductibles de $K[X]$ tels que le p.g.c.d. de leurs coefficients est égal à 1, donc, d'après le lemme 1.1.4, des irréductibles de $A[X]$. D'après la preuve du lemme 1.1.4, le p.g.c.d. des coefficients de $R_1 R_2 \dots R_s$ est égal à 1. Soit δ le p.g.c.d. des coefficients de P . On a d'une part $P = \delta P_0$ et $d^s \delta = d_1 d_2 \dots d_s$ donc d^s divise $d_1 d_2 \dots d_s$ et le quotient est δ ; donc, $P_0 = R_1 R_2 \dots R_s$ et $P = \delta R_1 R_2 \dots R_s$. Il reste à décomposer en produit de facteurs irréductibles l'élément δ de A , pour obtenir une décomposition en facteurs irréductibles de $A[X]$ du polynôme P . ■

Corollaire 1.1.6 *Si k est un corps commutatif, alors $k[X_1, \dots, X_n]$ est un anneau factoriel.*

Remarque 1.1.7 L'anneau $k[X, Y]$ est un anneau factoriel, mais n'est pas un anneau principal. En effet par exemple l'idéal $\langle X, Y \rangle$ ne peut être engendré par un unique élément de $k[X, Y]$, car si P était cet élément, on aurait $X = P(X, Y)Q(X, Y)$, donc le degré de P par rapport à X serait inférieur ou égal à 1 et son degré par rapport à Y serait inférieur ou égal à 0. Et $Y = P(X, Y)R(X, Y)$, donc le degré de P par rapport à Y serait inférieur ou égal à 1 et son degré par rapport à X serait inférieur ou égal à 0. Le polynôme P serait constant donc nul...

Soit P et Q deux éléments de $k[X]$; l'algorithme d'Euclide, qui calcule le p.g.c.d. de ces deux polynômes, permet de savoir si P et Q ont un zéro commun. Le *résultant* est un autre moyen pour arriver à ce résultat.

Définition 1.1.8 Soit $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{m-i}$ et $g = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$ deux éléments de $A[X]$. Le résultant de f et g , noté

$\text{Res}(f, g)$, est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $(m + n)$ suivante, appelée matrice de Sylvester :

$$\begin{pmatrix} n \text{ lignes} \\ m \text{ lignes} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Théorème 1.1.9 Si A est un anneau factoriel et f et g sont deux éléments de $A[X]$ écrits comme dans la définition 1.1.8, tels que $a_0 b_0 \neq 0$ alors f et g ont un diviseur commun non constant si, et seulement si, $\text{Res}(f, g) = 0$.

Remarque 1.1.10 Si on travaille dans $k[X]$ où k est un corps commutatif, l'algorithme d'Euclide, qui permet de calculer le p.g.c.d de deux polynômes, est plus efficace pour dire si deux polynômes ont un diviseur commun.

Pour prouver ce théorème, on démontre tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 1.1.11 Avec les hypothèses du théorème 1.1.9, il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

1. f et g ont un facteur commun non constant.
2. Il existe s et t deux polynômes non nuls tels que le degré de s est strictement inférieur au degré de f , le degré de t est strictement inférieur au degré de g et

$$tf - sg = 0.$$

Preuve du lemme. Soit k un diviseur commun non constant de f et g ; il existe s et t de degrés strictement inférieurs respectivement à celui de f et g (car k est non constant) tels que $f = ks$ et $g = kt$. D'où on déduit $tf - sg = 0$.

Réciproquement, on suppose que la condition 2. du lemme est vérifiée. D'autre part, puisque $A[X]$ est factoriel (car A l'est), on écrit les décompositions en produits de facteurs irréductibles de f et g . On a donc :

$$f = u \prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i} \quad g = v \prod_{i \in I} p_i^{\beta_i},$$

où $(p_i)_{i \in I}$ est un système de représentants des éléments irréductibles non constants de $A[X]$, u et v sont des éléments non nuls de A (on ne les écrit pas dans leur décomposition en produit de facteurs irréductibles de A), et pour $i \in I$, $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$. Dans ces conditions, on peut écrire :

$$s = u' \prod_{i \in I} p_i^{\alpha'_i} \quad t = v' \prod_{i \in I} p_i^{\beta'_i}$$

où u' et v' sont des éléments non nuls de A et pour $i \in I$, $\alpha'_i \leq \alpha_i$ et $\beta'_i \leq \beta_i$ et on sait qu'il existe au moins un $i_1 \in I$ et un $i_2 \in I$ tels que d'une part $\alpha'_{i_1} < \alpha_{i_1}$ et d'autre part $\beta'_{i_2} < \beta_{i_2}$. On obtient donc

$$tf = u \prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i + \beta'_i} = v \prod_{i \in I} p_i^{\beta_i + \alpha'_i},$$

ce qui implique (la décomposition en produit de facteurs irréductibles est unique) que pour $i \in I$, on a $\alpha_i + \beta'_i = \beta_i + \alpha'_i$. Si f et g n'ont pas de facteur commun non constant, alors pour $i \in I$, si $\alpha_i > 0$, $\beta_i = 0$. La condition qu'on a sur α_{i_1} implique que justement $\alpha_{i_1} > 0$ donc, on a $\beta_{i_1} = 0$ et par conséquent $\beta'_{i_1} = 0$, et $\alpha_{i_1} = \alpha'_{i_1}$ ce qui est une contradiction. ■

Preuve du théorème 1.1.9. On remarque tout d'abord que la condition $a_0b_0 \neq 0$ assure que les degrés respectifs de f et g sont exactement m et n . D'après le lemme 1.1.11, on sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux polynômes aient un facteur commun non constant est l'existence de s et t vérifiant la condition 2 du lemme. Donc, une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux polynômes aient un facteur commun non constant est l'existence de n éléments c_i non tous nuls de A ($0 \leq i \leq n-1$), et m éléments d_j non tous nuls de A , ($0 \leq j \leq m-1$) vérifiant

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i X^{n-i} f - \sum_{j=0}^{m-1} d_j X^{m-j} g = 0.$$

En écrivant que tous les coefficients du polynôme ci-dessus sont nuls, on obtient un système de $m+n$ équations linéaires homogènes à $m+n$ inconnues (qui sont les c_i et les d_j), dont le déterminant est, au signe près, le résultant de f et g . Pour que f et g aient un facteur commun non nul, il faut et il suffit donc que ce déterminant soit nul. D'où le théorème. ■

Remarque 1.1.12 La condition pour que les deux polynômes f et g aient un facteur commun non nul est une condition polynomiale en les coefficients de f et g : plus précisément, $\text{Res}(f, g)$ est un polynôme homogène de degré $m+n$ en les coefficients de f et g , de degré n en les coefficients de f , de degré m en les coefficients de g . On généralise cette notion de résultant au cas de polynômes à plusieurs indéterminées sur un corps algébriquement clos (un polynôme de plus que le nombre d'indéterminées) : le résultant est défini comme un polynôme irréductible en les coefficients des polynômes considérés, qui s'annule si, et seulement si, le système de polynômes donné admet au moins un zéro commun. Pour plus de détails, voir [5].

On a également la proposition suivante concernant le résultant de deux polynômes (voit l'identité de Bézout dans le cas où on regarde des polynômes à coefficients dans un corps).

Proposition 1.1.13 *Si les hypothèses du théorème 1.1.9 sur les polynômes f et g à coefficients dans l'anneau factoriel A sont vérifiées, alors il existe deux polynômes P et Q à coefficients dans A tels que*

1. $\partial^\circ P < \partial^\circ g$, $\partial^\circ Q < \partial^\circ f$,
2. $\text{Res}(f, g) = Pf + Qg$.

Preuve. Soit

$$C = \begin{pmatrix} X^{n-1}f(X) \\ X^{n-2}f(X) \\ \vdots \\ f(X) \\ X^{m-1}g(X) \\ X^{m-2}g(X) \\ \vdots \\ g(X) \end{pmatrix}$$

On désigne par C_i ($1 \leq i \leq m+n$) les $m+n$ colonnes de la matrice de Sylvester de f et g . On a

$$\det(C_1, C_2, \dots, C_{m+n-1}, C) = \det(C_1, C_2, \dots, C_{m+n-1}, C_{m+n}) = \text{Res}(f, g)$$

On développe $\det(C_1, C_2, \dots, C_{m+n-1}, C)$ par rapport à sa dernière colonne, ce qui nous donne le résultat annoncé. ■

Corollaire 1.1.14 *Si f et g sont des polynômes éléments de $\mathbb{C}[X]$ tels que $a_0b_0 \neq 0$, alors, f et g ont un zéro commun si, et seulement si, $\text{Res}(f, g) = 0$.*

Proposition 1.1.15 Soit $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{m-i}$, $g = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$ et $h = \sum_{i=0}^p c_i x^{p-i}$ trois éléments de $k[X]$; on suppose que $a_0 b_0 c_0 \neq 0$. Alors,

$$\text{Res}(f, gh) = \text{Res}(f, g)\text{Res}(f, h).$$

Preuve. Plaçons nous dans un surcorps K de k dans lequel les trois polynômes considérés sont scindés. Il existe dans ce surcorps des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ vérifiant

$$f(X) = a_0 \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i) \quad g(X) = b_0 \prod_{j=1}^n (X - \beta_j) \quad h(X) = c_0 \prod_{k=1}^p (X - \gamma_k).$$

Soit K_0 le sous-corps premier de K , c'est-à-dire $K_0 = \mathbb{Q}$ si K est de caractéristique nulle et $K_0 = \mathbb{F}_p$, si K est de caractéristique p (ici p n'est pas le degré du polynôme h). On peut voir le résultant de f et g soit comme un élément de k , soit comme un polynôme en les « indéterminées » $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$ à coefficients dans K_0 . Et de même, on peut considérer les racines de f et g comme des indéterminées. Tout cela nous amène à considérer les anneaux de polynômes \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 définis par

$$\mathcal{A}_1 = K_0[a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n] \quad \mathcal{A}_2 = K_0[a_0, b_0, t_1, \dots, t_m, u_1, \dots, u_n].$$

Ces anneaux sont des anneaux factoriels. Les relations entre coefficients et racines permettent de construire un morphisme d'anneaux de \mathcal{A}_1 dans \mathcal{A}_2 de la façon suivante : on envoie un élément de K_0 sur lui-même, et, en notant $\sigma_i(\underline{t})$ le $i^{\text{ème}}$ polynôme symétrique élémentaire en (t_1, \dots, t_m) , $\sigma_j(\underline{u})$ le $j^{\text{ème}}$ polynôme symétrique élémentaire en (u_1, \dots, u_n) , l'action du morphisme sur a_0, \dots, b_n est

$$a_0 \mapsto a_0 \quad a_1 \mapsto -a_0 \sigma_1(\underline{t}), \dots, \quad a_m \mapsto (-1)^m a_0 \sigma_m(\underline{t})$$

$$b_0 \mapsto b_0 \quad b_1 \mapsto -b_0 \sigma_1(\underline{u}), \dots, \quad b_n \mapsto (-1)^n a b_0 \sigma_n(\underline{u})$$

Ce morphisme est construit de façon à s'étendre en le morphisme de $\mathcal{A}_1[X]$ dans $\mathcal{A}_2[X]$ qui envoie le polynôme f sur $a_0(X - t_1) \cdots (X - t_m)$, et le polynôme g sur $b_0(X - u_1) \cdots (X - u_n)$. On a de plus le morphisme d'anneaux de \mathcal{A}_2 dans K défini par $t_1 \mapsto \alpha_1, \dots, u_n \mapsto \beta_n$.

On a ainsi deux morphismes d'anneaux

$$\mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \longrightarrow K.$$

On note $R(f, g)$ l'image de $\text{Res}(f, g)$ (qui est dans \mathcal{A}_1) dans \mathcal{A}_2 ; $R(f, g)$ est égal au déterminant ci-dessous, dans lequel on a factorisé n fois a_0 (dans les n premières colonnes) et m fois b_0 (dans les m dernières colonnes) : attention ici on a écrit le déterminant de la matrice transposée, image de la matrice de Sylvester.

$$a_0^n b_0^m \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -\sigma_1(\underline{t}) & \dots & 0 & -\sigma_1(\underline{u}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 \\ (-1)^m \sigma_m(\underline{t}) & \dots & 1 & \dots & \dots & -\sigma_1(\underline{u}) \\ 0 & \dots & -\sigma_1(\underline{t}) & (-1)^n \sigma_n(\underline{u}) & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (-1)^m \sigma_m(\underline{t}) & 0 & \dots & (-1)^n \sigma_n(\underline{u}) \end{vmatrix}$$

On voit donc que $R(f, g)$ est le produit de $a_0^n b_0^m$ par un polynôme en \underline{t} et \underline{u} . Ce dernier est de degré m en chacun des u_j , puisque son terme de plus haut degré en \underline{u} est le produit $(-1)^{mn} (u_1 \cdots u_n)^m$ des termes diagonaux du déterminant ci-dessus.

On remarque que pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$, $R(f, g)$ est nul si $t_i = u_j$, et est donc divisible par $(t_i - u_j)$. Plus précisément, notons $g_{t_i \rightarrow u_j}(X)$ l'élément de $\mathcal{A}_2[X]$ obtenu en remplaçant u_j par t_i dans $g(X)$.

Le résultant $\text{Res}(f, g_{t_i \rightarrow u_j})$ est nul puisque t_i est une racine commune à f et $g_{t_i \rightarrow u_j}$. Donc, si on fait $u_j = t_i$ dans $R(f, g)$, on trouve 0.

L'anneau \mathcal{A}_2 est factoriel, donc $R(f, g)$ est divisible par $a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (t_i - u_j)$. Cette relation de divisibilité, et le calcul des degrés en les u_j montre qu'il existe une constante $c \in K_0$ telle que

$$R(f, g) = ca_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (t_i - u_j).$$

On trouve que $c = 1$ en calculant le déterminant pour $t_1 = \dots = t_m = 0$ et $u_1 = \dots = u_n = 1$.

En faisant ce raisonnement pour f et h et pour f et gh , on peut écrire

$$f(X) = a_0 \prod_{i=1}^m (X - t_i) \quad g(X) = b_0 \prod_{j=1}^n (X - u_j) \quad h(X) = \prod_{j=n+1}^{n+p} c_0 (X - u_j),$$

où $a_0, b_0, c_0, t_1, \dots, t_m, u_1, \dots, u_{n+p}$ sont des indéterminées, et on introduit les anneaux

$$\mathcal{A}'_1 = K_0[a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n, c_0, \dots, c_p], \quad \mathcal{A}'_2 = K_0[a_0, b_0, c_0, t_1, \dots, t_m, u_1, \dots, u_{n+p}]$$

et comme plus haut le morphisme d'anneaux $\mathcal{A}'_1 \rightarrow \mathcal{A}'_2$. Et on a

$$R(f, g) = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (t_i - u_j), \quad R(f, h) = a_0^p c_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=n+1}^{n+p} (t_i - u_j)$$

$$R(f, g)R(f, h) = a_0^{n+p} b_0^m c_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n+p} (t_i - u_j) = R(f, gh).$$

Ce qui prouve la proposition. ■

Remarque 1.1.16 On peut remarquer que cette proposition reste valable pour trois polynômes à coefficients dans un anneau intègre A , puisqu'on peut les voir comme des polynômes à coefficients dans le corps des fractions de A . Donc, si les polynômes f , g , et h sont des polynômes en trois indéterminées X_0 , X_1 et X_2 , et si on les considère comme des polynômes en X_0 à coefficients dans l'anneau $K[X_1, X_2]$, alors les résultants sont notés Res_{X_0} et on a encore

$$\text{Res}_{X_0}(f, gh) = \text{Res}_{X_0}(f, g)\text{Res}_{X_0}(f, h).$$

Les courbes algébriques planes sont des variétés algébriques particulières : voici un théorème important concernant ces variétés algébriques.

Théorème 1.1.17 (Lemme de Study.) *Soit K un corps algébriquement clos, f et g deux polynômes à n indéterminées à coefficients dans K , donc éléments de $K[X_1, \dots, X_n]$, $V(f)$ (resp. $V(g)$) l'ensemble des zéros de f (resp. de g). Si f est irréductible et $V(f) \subset V(g)$, alors f divise g .*

Preuve. On peut supposer que $g \neq 0$, car si $g = 0$ alors tout f est facteur de g . Dans ce cas, aux points $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ où $g(\underline{x}) \neq 0$, $f(\underline{x}) \neq 0$ (car $f(\underline{x}) = 0$ implique $g(\underline{x}) = 0$). On peut donc supposer que $\partial_{X_n}^\circ f = p > 0$, et dans ce cas $\partial_{X_n}^\circ g = q > 0$. En effet, si $q = 0$, et si on fixe n'importe quel $(n-1)$ -uplet (c_1, \dots, c_{n-1}) d'éléments de K qui n'annule ni g (qui est en fait un polynôme en $(n-1)$ indéterminées X_1, \dots, X_{n-1}), ni le coefficient de plus haut degré de f , alors, puisque K est algébriquement clos, et que $p > 0$, le polynôme $f(c_1, \dots, c_{n-1}, X_n)$ à une indéterminée X_n admet p racines distinctes ou confondues. Soit c_n l'une d'entre elles ; alors $f(c_1, \dots, c_n) = 0$ et donc par hypothèse $g(c_1, \dots, c_{n-1}, c_n) = g(c_1, \dots, c_{n-1}) = 0$, ce qui est une contradiction.

On a $f = \sum_{i=0}^p a_i(X_1, \dots, X_{n-1})X^{p-i}$ et (proposition 1.1.13 avec $A = K[X_1, \dots, X_{n-1}]$) il existe P et Q deux éléments de $K[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$ vérifiant $\partial_{X_n}^\circ P < q$ et $\partial_{X_n}^\circ Q < p$ et $\text{Res}_{X_n}(f, g) = Pf + Qg$ ($\text{Res}_{X_n}(f, g)$ est dans $K[X_1, \dots, X_{n-1}] \subset K[X_1, \dots, X_n]$). Soit $(c_1, \dots, c_{n-1}) \in K^{n-1}$ tel que $a_0(c_1, \dots, c_{n-1}) \neq 0$, alors il existe c_n (voir plus haut) tel que $f(c_1, \dots, c_n) = g(c_1, \dots, c_n) = 0$, et donc $\text{Res}_{X_n}(f, g)(c_1, \dots, c_{n-1}) = 0$. Le polynôme $\text{Res}_{X_n}(f, g)a_0$ s'annule partout et est donc le polynôme nul, ce qui prouve (car a_0 n'est pas le polynôme nul) que $\text{Res}_{X_n}(f, g)$ est le polynôme nul. Donc, f et g ont un facteur commun et comme f est irréductible, ce facteur ne peut être que f (à inversible près) et f divise g . ■

Pour parler de variétés projectives, on va travailler avec des polynômes homogènes. Quelques rappels sur les polynômes homogènes sont donc nécessaires.

Définition 1.1.18 Soit K un corps commutatif; un polynôme $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ est homogène de degré m si

$$f = \sum_{i_1 + \dots + i_n = m} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}.$$

Remarque 1.1.19 Un polynôme f est homogène de degré m si, et seulement si,

$$f(tX_1, \dots, tX_n) = t^m f(X_1, \dots, X_n), \text{ pour tout } t \in K.$$

Ceci implique en particulier qu'on peut parler de l'ensemble des zéros de f dans $\mathbf{P}^{n-1}(K)$. En effet, si (x_1, \dots, x_n) est tel que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, et si $M \in \mathbf{P}^{n-1}(K)$ a pour système de coordonnées homogènes $(x_1; \dots; x_n)$, alors pour tout autre système de coordonnées homogènes de M , soit $(y_1; \dots; y_n)$, on a également $f(y_1, \dots, y_n) = 0$. On dit alors que M est un zéro de f .

Exemple 1.1.20 Soit $f \in K[X, Y]$ un polynôme de degré m définissant une courbe affine \mathcal{C} , c'est-à-dire $\mathcal{C} = \{(x, y) \in K^2 \mid f(x, y) = 0\}$; on lui associe la courbe projective $\mathbf{P}(\mathcal{C}) = \{(x_0; x_1; x_2) \in \mathbf{P}^2(K) \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ où F est le polynôme homogène de degré m défini par homogénéisation de f

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^m f\left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right).$$

Réciproquement, si $F \in K[X_0, X_1, X_2]$ est un polynôme homogène de degré m qui définit une courbe projective, on obtient, en déshomogénéisant, $f(X, Y) = F(1, X, Y) \in K[X, Y]$ un polynôme de degré m , et donc une courbe plane affine.

Lemme 1.1.21 Les facteurs d'un polynôme homogène sont homogènes.

Preuve. Soit F un polynôme degré 0 (donc, homogène). La propriété annoncée est vraie car $F = GH$ implique alors que les polynômes G et H sont de degré 0 aussi.

Soit F un polynôme de degré m et supposons que $F = GH$, où G et H sont deux polynômes de degrés respectifs p et q . Si F est homogène et si de plus G est homogène de degré $p \leq n$, alors nécessairement H est homogène de degré égal à $m - p$. Reste à étudier le cas où ni G , ni H , ne sont homogènes. Dans ce cas, on peut écrire

$$G = G_0 + \dots + G_p \text{ et } H = H_0 + \dots + H_q$$

où, pour $0 \leq i \leq p$ (resp. $0 \leq j \leq q$) les polynômes G_i (resp. H_j) sont homogènes de degré i (resp. j). Remarquons que $p \in \{i \mid G_i \neq 0\}$ et $q \in \{j \mid H_j \neq 0\}$. Nécessairement ces deux ensembles contiennent au moins deux éléments, car sinon les deux polynômes seraient homogènes (ce qu'on exclut ici). Alors notons i_0 le plus petit entier vérifiant $G_{i_0} \neq 0$, et j_0 le plus petit entier vérifiant $H_{j_0} \neq 0$. Puisque ni G ni H ne sont homogènes, on a $i_0 < p$ et $j_0 < q$, donc, $i_0 + j_0 < p + q = m$. Alors la composante homogène du produit $F = GH$ de degré $i_0 + j_0$ n'est pas nulle, car égale à $G_0 H_{j_0} + \dots + G_{i_0} H_{j_0} + \dots + G_{i_0+j_0} H_0 = G_{i_0} H_{j_0}$, et F n'est pas homogène, ce qui est une contradiction. (preuve par contraposée). ■

De ce lemme on déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1.1.22 *Soit $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ et $f = f_1 \cdots f_r$ sa décomposition en produits de facteurs irréductibles (unique à l'ordre près des facteurs); soit F, F_1, \dots, F_r les polynômes homogènes associés. Alors $F = F_1 \cdots F_r$ est la décomposition en produit de facteurs irréductibles de F .*

Soit F un polynôme dans $K[X_0, \dots, X_p]$, homogène de degré m ; alors on peut écrire F sous la forme $F = \sum_{i=0}^m A_i X_0^{m-i}$ où les A_i , pour $0 \leq i \leq m$, sont des polynômes homogènes de degré i dans $K[X_1, \dots, X_p]$. Si on considère un deuxième élément homogène de $K[X_0, \dots, X_p]$, soit G , de degré n , écrit sous la même forme $G = \sum_{j=0}^n B_j X_0^{n-j}$, le résultant de ces deux polynômes considérés comme éléments de $K[X_1, \dots, X_p][X_0]$, noté $\text{Res}_{X_0}(F, G)$, est un élément de $K[X_1, \dots, X_p]$.

Proposition 1.1.23 *Si $A_0 B_0$ n'est pas le polynôme constant nul, alors $\text{Res}_{X_0}(F, G)$ est un polynôme homogène de degré $m \times n$.*

Preuve. Notons que $\text{Res}_{X_0}(F, G) = \det R = \det((r_{ij})_{1 \leq i, j \leq m+n})$, et les coefficients non nuls de la matrice R vérifient :

$$r_{ij} = A_{j-i} \text{ si } i \leq n; \quad r_{ij} = B_{n+j-i} \text{ si } i > n,$$

ceci avec la convention $A_k = 0$ si $k \geq m$ ou $k < 0$, et $B_k = 0$ pour $k \geq n$ ou $k < 0$. Donc r_{ij} est un polynôme homogène de degré $j - i$, si $i \leq n$, de degré $n + j - i$, si $i > n$. Si on développe le calcul du déterminant de la matrice R (pour calculer $\text{Res}_{X_0}(F, G)$), on trouve que ce déterminant s'écrit comme une somme de produits de la forme (au signe près : $\prod_{1 \leq k \leq m+n} r_{\sigma(k)k}$, où σ est une permutation de l'ensemble $[1, m+n]$; on ne considère ici

que de tels produits qui ne contiennent aucun coefficient nul, bien entendu ! Donc, $\text{Res}_{X_0}(F, G)$ est une somme de produits du type (au signe près)

$$\prod_{k|\sigma(k) \leq n} A_{k-\sigma(k)} \prod_{k|\sigma(k) > n} B_{n+k-\sigma(k)}.$$

Un tel produit est homogène degré

$$\sum_{k|\sigma(k) \leq n} (k - \sigma(k)) + \sum_{k|\sigma(k) > n} (n + k - \sigma(k)) = \sum_{k=1}^{m+n} k - \sum_{k=1}^{m+n} (\sigma(k)) + mn = mn.$$

■

Une autre preuve peut être donnée pour cette proposition.

On désigne par $\overline{K(X_1, \dots, X_{p-1})}$, la clôture algébrique ou du moins une extension algébrique suffisante du corps $K(x_1, \dots, x_{p-1})$; on peut supposer que $A_0 = B_0 = 1$ (puisque A_0 et B_0 sont non nuls) et dans ce cas, on factorise fF et G dans $\overline{K(X_1, \dots, X_{p-1})}[X_0]$, soit

$$F = \prod_{1 \leq \alpha \leq m} (X_0 - x_\alpha) \text{ et } G = \prod_{1 \leq \beta \leq n} (X_0 - y_\beta)$$

et on a $\text{Res}_{X_0}(F, G) = \prod_{1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq \beta \leq n} (x_\alpha - y_\beta)$. En donnant à chaque x_α et chaque y_β le degré 1, on donne à A_i le degré i , et B_j le degré j , ce qui permet de conclure que $\text{Res}_{X_0}(F, G)$ est homogène de degré $m \times n$. ■

Remarque 1.1.24 La condition « A_0B_0 n'est pas le polynôme nul » impose $\partial_{X_0}^\circ(F) = m$ et $\partial_{X_0}^\circ(G) = n$. Si tel n'est pas le cas, alors notons m_1 le degré de F par rapport à X_0 et n_1 le degré de G par rapport à X_0 . Alors, on peut écrire

$$F = \sum_{i=0}^{m_1} A_i X_0^{m_1-i}, \quad G = \sum_{j=0}^{m_2} B_j X_0^{m_2-j}$$

où A_i est un polynôme homogène en X_1, X_2 de degré $i + m - m_1$, et B_j est un polynôme homogène en X_1, X_2 de degré $j + n - n_1$. En adaptant (très peu!) la preuve précédente on obtient le lemme suivant.

Lemme 1.1.25 $\text{Res}_{X_0}(F, G)$ est un polynôme homogène en X_1, X_2 de degré

$$n_1 m - n_1 m_1 + m_1 n.$$

D'où on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.26 $\text{Res}(F, G)$ est un polynôme homogène de degré $\leq m \times n$.

Preuve. Avec les notations du lemme, on a

$$mn - (n_1 m - n_1 m_1 + m_1 n) = (n - n_1)(m - m_1).$$

Ce qui finit cette preuve. ■

1.2 Courbes algébriques planes, projectives ou affines

Notation 1.2.1 Si f est un polynôme en n indéterminées à coefficients dans K , on note $V(f)$ l'ensemble des zéros de f dans K^n .

Si F est un polynôme homogène en $(n + 1)$ indéterminées à coefficients dans K , on note $V(F)$ l'ensemble des zéros de F dans $\mathbf{P}^n(K)$.

Définition 1.2.2 Une courbe algébrique plane affine de \mathbb{C}^2 est l'ensemble des zéros $V(f)$ d'un polynôme $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ et $f = 0$ est appelée l'équation de la courbe \mathcal{C} . Le degré de la courbe est égal au degré de son équation. Une courbe algébrique plane projective de $\mathbf{P}(\mathbb{C}^2)$ est l'ensemble des zéros $V(F)$ d'un polynôme homogène $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ et $F = 0$ est appelée l'équation de la courbe \mathcal{C} . Le degré de la courbe est égal au degré de son équation.

Une courbe projective plane \mathcal{C} , d'équation F , où F est un polynôme homogène non constant à coefficients complexes est donc définie par

$$\mathcal{C} = V(F) = \{(x_0; x_1; x_2) \in \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}.$$

1.2.1 Décomposition en composantes irréductibles

Définition 1.2.3 Une courbe projective plane \mathcal{C} est dite irréductible si elle n'est pas réunion de deux courbes planes projectives distinctes.

Remarque 1.2.4 Si \mathcal{C} est une courbe réductible, alors il existe \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux courbes distinctes mais aussi telles que \mathcal{C}_1 n'est pas contenue dans \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_2 n'est pas contenue dans \mathcal{C}_1 , vérifiant $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

Proposition 1.2.5 Soit \mathcal{C} une courbe projective plane définie par $\mathcal{C} = V(F)$. Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

- i \mathcal{C} est une courbe irréductible.
- ii F est une puissance d'un polynôme homogène irréductible.

Preuve Montrons tout d'abord que si \mathcal{C} n'est pas irréductible, alors F n'est pas la puissance d'un polynôme homogène irréductible. D'après la remarque 1.2.4, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, avec $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ et $\mathcal{C}_2 = V(F_2)$, ces deux derniers polynômes étant tels qu'il existe deux polynômes irréductibles G_1 et G_2 distincts ou plutôt non associés (on n'obtient pas l'un à partir de l'autre en le multipliant par une constante non nulle) tels que G_1 divise F_1 et G_2 divise F_2 . On a de plus $V(G_1) \subset V(F)$ et $V(G_2) \subset V(F)$, d'où (lemme de Study) G_1 et G_2 sont des facteurs de F , qui n'est donc pas une puissance d'un polynôme irréductible.

Réciproquement, si F n'est pas une puissance d'un polynôme irréductible, alors, en utilisant la décomposition de F en produit de facteurs irréductibles, on peut écrire F sous la forme $F = F_1 F_2$, où F_1 et F_2 sont deux polynômes homogènes non constants premiers entre eux. Et on a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, où $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ et $\mathcal{C}_2 = V(F_2)$. Reste à montrer que ces deux courbes projectives \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont distinctes (au sens de la remarque 1.2.4). Si par exemple $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, alors si G est un facteur irréductible de F_1 , $V(G) \subset V(F_2)$ et G divise F_2 (lemme de Study), et F_1 et F_2 ne sont pas premiers entre eux, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur ces deux polynômes. Donc, on n'a ni $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, ni $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, et \mathcal{C} n'est pas une courbe irréductible. ■

De cette proposition on déduit immédiatement (par récurrence) le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.6 *Si \mathcal{C} est une courbe algébrique plane projective définie par $\mathcal{C} = V(G)$, avec $G = F_1^{k_1} \dots F_r^{k_r}$ (décomposition de G en produit de facteurs irréductibles), alors*

- i la courbe \mathcal{C} a une unique décomposition (à l'ordre près) en une réunion de courbes irréductibles, appelées les composantes irréductibles de \mathcal{C} . On a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_r$;
- ii on a $\mathcal{C}_i = V(F_i^{k_i})$, pour $1 \leq i \leq r$.

Remarque 1.2.7 Si F est l'équation d'une courbe plane projective, les facteurs de sa décomposition en produit de facteurs irréductibles sont les équations de ses composantes irréductibles (et on a la même chose pour les courbes planes affines). Cette dernière proposition implique que si une courbe plane projective ne contient pas la droite de l'infini, alors sa décomposition en composantes irréductibles correspond à la décomposition en composantes irréductibles de la courbe affine associée.

On reprend les notations du corollaire 1.2.6.

Définition 1.2.8 *Chaque F_i est l'équation réduite de la courbe \mathcal{C}_i ; $F = F_1 \dots F_r$ est l'équation réduite de la courbe \mathcal{C} . On dit aussi que $\mathcal{C}_R = V(F)$ est la courbe réduite associée à \mathcal{C} .*

Remarque 1.2.9 Si $\mathcal{C} = V(G)$, alors l'équation réduite de la courbe \mathcal{C} est F avec $\sqrt{\langle G \rangle} = \langle F \rangle$.

1.2.2 Intersection d'une courbe avec une droite

Soit \mathcal{C} une courbe algébrique plane projective de degré n d'équation $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, L une droite projective d'équation X_0 (c'est-à-dire $L = \{X_0 = 0\} = V(X_0)$) qui n'est pas une composante de \mathcal{C} (donc X_0 ne divise pas F), et M un point de $L \cap \mathcal{C}$, de coordonnées homogènes $(0; x_1; x_2)$. Soit $F_0 \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ obtenu en substituant 0 à X_0 dans F ; F_0 est un polynôme homogène de degré n . Puisque \mathbb{C} est algébriquement clos, on peut écrire

$$F_0 = \prod_{i=1}^r (a_{\alpha_i} X_1 - b_{\alpha_i} X_2)^{s_i}, \text{ avec } \sum_{i=1}^r s_i = n \text{ et on a } F_0(0, x_1, x_2) = 0, \text{ donc, il existe } i, 1 \leq i \leq r, \text{ tel que } a_{\alpha_i} x_1 - b_{\alpha_i} x_2 = 0.$$

Définition 1.2.10 *La multiplicité d'intersection de \mathcal{C} et L au point M , notée $\nu_M(\mathcal{C}, L)$, est égale par définition à l'entier s_i .*

Cette définition se généralise sans difficulté au cas d'une droite projective L quelconque par changement projectif de coordonnées.

Proposition 1.2.11 *Soit \mathcal{C} une courbe projective plane de degré n d'équation F , et L une droite projective qui n'est pas une composante de la courbe \mathcal{C} . Le nombre de points d'intersection, comptés avec multiplicité, de \mathcal{C} avec L est exactement n .*

Preuve. Supposons que L a pour équation X_0 , et reprenons les notations du début de ce paragraphe. Le nombre de points d'intersection de \mathcal{C} avec L est égal à r , et en les comptant avec leur multiplicité, puisque $\sum s_i = n$, on obtient le résultat. ■

Proposition 1.2.12 *Soit \mathcal{C} une courbe algébrique plane projective d'équation F et de degré n . Soit P un point du plan projectif. Si $P \notin \mathcal{C}$, alors toute droite projective passant par P rencontre la courbe \mathcal{C} en exactement n points distincts, sauf pour au plus $n(n-1)$ d'entre ces droites.*

Preuve. On va supposer que le point P a pour coordonnées homogènes $(0; 0; 1)$ (on peut toujours s'y ramener par un changement de repère projectif). Soit L une droite projective passant par P . L'équation de L est de la forme $\lambda_1 X_0 - \lambda_0 X_1 = 0$ (où $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0)$, et le couple (λ_0, λ_1) est défini à une constante multiplicative près). Si un point $M \in L \setminus \{P\}$, alors il existe t tel que M a pour système de coordonnées homogènes $(\lambda_0; \lambda_1; t)$. L'intersection de L (qui n'est pas une composante de \mathcal{C} , car $P \notin \mathcal{C}$) et de \mathcal{C} est donc donnée par l'équation polynomiale en t : $F(\lambda_0, \lambda_1, t) = 0$. Cette équation a des zéros distincts si, et seulement si, $\text{Res}(F(\lambda_0, \lambda_1, t), \partial F / \partial t(\lambda_0, \lambda_1, t)) \neq 0$. Or, (voir proposition 1.1.23), ce résultant est un polynôme homogène en (λ_0, λ_1) de degré au plus $n(n-1)$. Il y a donc au plus $n(n-1)$ droites projectives passant par P qui rencontrent \mathcal{C} en des points avec multiplicités différentes de 1. ■

1.2.3 Points singuliers d'une courbe algébrique plane

Soit \mathcal{C} une courbe algébrique plane projective d'équation F de degré n . Soit P un point de \mathcal{C} . On se propose ici de donner des détails sur le nombre de points d'intersection d'une droite passant par P , qui n'est pas une composante de \mathcal{C} , avec la courbe \mathcal{C} , plus exactement, sur la multiplicité de l'intersection d'une telle droite passant par P avec la courbe \mathcal{C} au point P . On va montrer que cette multiplicité est 1, sauf pour une seule de ces droites (ceci en général, c'est-à-dire, on le verra, lorsque le point P est un point *simple* de la courbe). Comme l'étude concerne ce qui se passe au voisinage du point P , on va travailler dans la carte affine dans laquelle se trouve le point P , et on suppose que P a pour système de coordonnées homogènes $(1; a; b)$, ce qui permet de travailler avec $f(X_1, X_2) = F(1, X_1, X_2)$, l'équation affine de \mathcal{C} dans l'ouvert affine défini par $\{(x_0; x_1; x_2) \in \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_0 \neq 0\}$ qui contient le point P . (f est obtenue par deshomogénéisation de F).

Le développement de Taylor de f en (a, b) donne

$$f(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial X_1^i \partial X_2^{k-i}}(a, b) (X_1 - a)^i (X_2 - b)^{k-i}.$$

On coupe \mathcal{C} par la droite $L_{\lambda\mu}$ qui passe par P dont les équations paramétriques sont $\begin{cases} X_1 = a + \lambda t \\ X_2 = b + \mu t \end{cases}$. Ce qui amène à résoudre l'équation polynomiale en t suivante :

$$0 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial X_1^i \partial X_2^{k-i}}(a, b) \lambda^i \mu^{k-i} t^k,$$

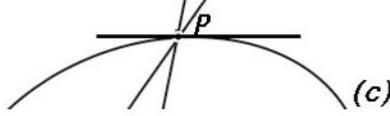
le point P correspondant à la racine 0 de ce polynôme (qui est sans facteur constant puisque $P \in L \cap \mathcal{C}$). La multiplicité d'intersection de \mathcal{C} avec $L_{\lambda\mu}$ au point P , c'est-à-dire la multiplicité de la racine 0 du polynôme en t ci-dessus, est donc égale à l'ordre du premier terme non nul dans ce développement de Taylor. D'où la définition suivante de la multiplicité de la courbe \mathcal{C} au point P .

Définition 1.2.13 La multiplicité de \mathcal{C} au point P , notée $\nu_P(\mathcal{C})$ est égale à l'ordre du premier terme non nul du développement

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial X_1^i \partial X_2^{k-i}}(a, b) \lambda^i \mu^{k-i} t^k \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(a, b) \mu + \frac{\partial f}{\partial X_2}(a, b) \lambda \right) t + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}(a, b) \mu^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}(a, b) \lambda \mu + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}(a, b) \lambda^2 \right) t^2 \\ &\quad + \sum_{k=3}^n \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial X_1^i \partial X_2^{k-i}}(a, b) \lambda^i \mu^{k-i} t^k. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.14 Si $\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(a, b), \frac{\partial f}{\partial X_2}(a, b) \right) \neq (0, 0)$, alors

1. pour toute droite $L_{\lambda\mu}$ passant par P , sauf une, $t = 0$ est un zéro de multiplicité 1 de g et donc la multiplicité d'intersection de toute droite passant par P , sauf une, avec \mathcal{C} en P est égale à 1;
2. il y a une droite, correspondant aux paramètres (λ, μ) vérifiant $\mu \frac{\partial f}{\partial X_1}(a, b) + \lambda \frac{\partial f}{\partial X_2}(a, b) = 0$, qui passe par le point P , dont la multiplicité d'intersection en P avec \mathcal{C} est strictement supérieure à 1;
3. on peut représenter la courbe \mathcal{C} au voisinage du point P comme ci-dessous.



Si $\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(a, b), \frac{\partial f}{\partial X_2}(a, b) \right) = (0, 0)$ et $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}(a, b), \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}(a, b), \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}(a, b) \right) \neq (0, 0, 0)$, alors

1. pour toute droite $L_{\lambda\mu}$ passant par P , sauf deux, distinctes ou confondues, $t = 0$ est un zéro de multiplicité 2 de g et donc la multiplicité d'intersection de toute droite passant par P , sauf deux, distinctes ou confondues, avec \mathcal{C} en P est égale à 2;
2. il y a deux droites, distinctes ou confondues, qui passe par P , dont la multiplicité d'intersection en P avec \mathcal{C} est strictement supérieure à 2; leurs paramètres λ et μ vérifient

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}(a, b) + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}(a, b) + \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}(a, b) = 0,$$

elles sont distinctes ou confondues;

3. on alors autour du point P l'une des situations suivantes.



Définition 1.2.15 Un point P de \mathcal{C} est dit singulier si $\nu_P(\mathcal{C}) > 1$; il est dit simple ou régulier si $\nu_P(\mathcal{C}) = 1$.

Proposition 1.2.16 Soit \mathcal{C} une courbe plane projective d'équation F , P un point de \mathcal{C} et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- i $\nu_P(\mathcal{C}) = r$.
- ii Les dérivées partielles d'ordre s , $0 \leq s < r$, de F sont nulles en P .

Remarque 1.2.17 Par conséquent, si le point P a pour coordonnées homogènes $(1; 0; 0)$, alors $f = f_1 + f_2$ où f_1 est un polynôme homogène de degré r en (X_1, X_2) et f_2 une somme de monômes en (X_1, X_2) de degré au moins $(r + 1)$.

1.2.4 Équation de la tangente à une courbe algébrique plane en un point

Définition 1.2.18 Une tangente à \mathcal{C} au point P est ou bien une composante de \mathcal{C} qui contient P , ou bien une droite passant par P qui n'est pas une composante de \mathcal{C} dont la multiplicité d'intersection avec \mathcal{C} au point P est strictement supérieure à $\nu_P(\mathcal{C})$.

Remarque 1.2.19 De la proposition 1.2.12, on déduit dans les cas particuliers des degrés 2 et 3, qu'en général, d'un point $P \notin \mathcal{C}$ on peut mener deux tangentes (si \mathcal{C} est de degré 2), et six tangentes (si \mathcal{C} est de degré 3).

Soit \mathcal{C} une courbe algébrique projective plane d'équation $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ de degré n , P un point non singulier de \mathcal{C} , de coordonnées homogènes $(1; a; b)$, $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ obtenue par déshomogénéisation de F ($f(X_1, X_2) = F(1, X_1, X_2)$).

Équation affine de la tangente en P .

$$(*) \quad \ell(X_1, X_2) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(a, b)(X_1 - a) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(a, b)(X_2 - a) = 0.$$

Équation projective de la tangente en P . On homogénéise l'équation (*) en remarquant qu'on peut appliquer au polynôme homogène F la formule d'Euler.

$$X_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + X_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial X_2} = nF.$$

Ce qui donne appliqué en $(1, a, b)$:

$$\frac{\partial F}{\partial X_0}(1, a, b) + a \frac{\partial F}{\partial X_1}(1, a, b) + b \frac{\partial F}{\partial X_2}(1, a, b) = nF(1, a, b).$$

D'où l'équation (**) cherchée.

$$(**) \quad X_0 \frac{\partial F}{\partial X_0}(1, a, b) + X_1 \frac{\partial F}{\partial X_1}(1, a, b) + X_2 \frac{\partial F}{\partial X_2}(1, a, b) = 0.$$

Remarque 1.2.20 Le point « à l'infini » de cette droite s'obtient en faisant $X_0 = 0$ dans cette équation.

Remarque 1.2.21 On peut voir que lorsque P n'est pas un point singulier de la courbe algébrique plane affine \mathcal{C} d'équation f , si ℓ désigne l'équation de la tangente en P à \mathcal{C} , on peut écrire $f = \ell + k$, où k est une somme de monômes dont tous les degrés sont au moins égaux à 2. On peut étendre cette remarque au cas général : si m est la multiplicité de \mathcal{C} au point P , et si ℓ_1, \dots, ℓ_m sont les équations des tangentes en P à \mathcal{C} , distinctes ou confondues, on a $f = \prod_{i=1}^m \ell_i + k$, où k est une somme de monômes dont tous les degrés sont au moins égaux à $m + 1$.

1.3 Intersection de courbes planes. Théorème de Bézout

On considère deux courbes algébriques projectives planes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de degrés respectifs m et n , d'équations respectives F_1 et F_2 , qui n'ont pas de composante commune. On s'intéresse dans ce paragraphe à l'intersection de ces deux courbes. En particulier, de même qu'on a défini la notion de multiplicité d'intersection d'une courbe avec une droite en l'un de leurs points communs, on va définir la multiplicité d'intersection de \mathcal{C}_1 avec \mathcal{C}_2 en un point P de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, multiplicité notée $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. Cette multiplicité d'intersection doit être une généralisation de la notion déjà introduite de multiplicité d'intersection en un point commun d'une courbe et d'une droite.

1.3.1 Intersection de deux courbes algébriques projectives planes

Théorème 1.3.1 *Si deux courbes planes projectives n'ont pas de composantes communes, alors leur intersection est formée d'un nombre fini de points distincts.*

Preuve. Soit F_1 et F_2 les équations respectives des deux courbes. On note $m = \partial^\circ F_1$ et $n = \partial^\circ F_2$. On va tout d'abord montrer que le nombre de points de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ dont les coordonnées homogènes sont de la forme $(x_0; x_1; x_2)$ avec $x_0 \neq 0$ (c'est-à-dire, les points qui ne sont pas « à l'infini ») est fini. Pour cela, soit f_1 et f_2 les deux polynômes en les indéterminées X_1 et X_2 obtenu par déshomogénéisation de F_1 et F_2 (en substituant dans ces polynômes 1 à X_0). On peut considérer ces deux polynômes comme des éléments de $\mathbb{C}[X_1][X_2]$.

Lemme 1.3.2 *Le résultant $\text{Res}_{X_2}(f_1, f_2)$ de f_1 et f_2 vus comme polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}[X_1]$ est de degré $\leq mn$.*

Preuve du lemme. Ce résultant est égal au résultant $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)$ de F_1 et F_2 considérés comme polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}[X_0, X_1]$ (qui est homogène de degré $\leq mn$) dans lequel on substitue 1 à X_0 . D'où le lemme. ■

De ce lemme se déduit immédiatement la preuve du théorème 1.3.1, car $\text{Res}_{X_2}(f_1, f_2)$ a au plus mn racines distinctes, d'où il y a au plus nm points d'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 « à distance finie ». Le même raisonnement montre que le nombre de points de l'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 dont la deuxième coordonnée homogène, ou la troisième coordonnée homogène est non nulle est fini. D'où le théorème. ■

Remarque 1.3.3 Si on part de deux courbes planes affines réduites de degrés respectifs m_1 et n_1 , après homogénéisation, on trouve la situation précédente et donc ces deux courbes planes affines se rencontrent en au plus $m_1 n_1$ points.

1.3.2 Multiplicité d'intersection de deux courbes algébriques projectives planes

Cette notion est assez facile à comprendre d'une manière intuitive. Considérons le cas le plus simple : les deux courbes considérées sont irréductibles (et toujours sans composante commune, donc ici distinctes). Alors, lorsqu'elles se coupent en P , on voit bien que seuls deux cas se présentent : ou bien les deux courbes sont « tangentes », ou bien elles ne le sont pas. Si elles sont tangentes comme sur la figure 1 et si on déplace l'une d'entre elles sans toucher à l'autre (voir figure 2), alors on voit que le point d'intersection se dédouble.



figure 1



figure 2

Il semble naturel de dire alors dans ce deuxième cas que la « multiplicité d'intersection » des deux courbes en P est égale à 2. Mais, dans cette description intuitive de la multiplicité d'intersection de deux courbes, même dans ce cas simple, que veut dire « déplacer » ? Le résultat trouvé est-il indépendant du déplacement ? Et comment généraliser cette notion ?

On a aussi pour objectif de définir la multiplicité d'intersection de deux courbes qui, lorsque l'une de ces courbes est une droite, soit exactement la multiplicité d'intersection de cette droite avec l'autre courbe, multiplicité déjà définie plus haut (définition 1.2.10). Ce qui semble *a priori* réalisable, puisque il suffit d'écrire qu'au point d'intersection P , un résultant s'annule, que ce résultant est un polynôme homogène en deux variables qui se

décompose en produit de facteurs irréductibles. Il semble naturel de dire que la multiplicité d'intersection en P est l'exposant du facteur irréductible correspondant à P . Mais, retrouve-t-on la même notion que celle, intuitive, ci-dessus ? Et cette définition est-elle indépendante des choix de coordonnées (les courbes restent les mêmes en cas de changement de coordonnées, et la multiplicité doit rester inchangée).

Enfin les courbes planes sont des cas particuliers du cas plus général suivant : une courbe algébrique plane est une hypersurface algébrique de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$. L'intersection de deux courbes algébriques planes doit être vue de la même manière que l'intersection de n hypersurfaces algébriques de $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$.

Nous allons donner ici une définition *axiomatique* de la multiplicité d'intersection de deux courbes en un point, puis en donner la définition algébrique. On verra par la suite que ces définitions répondent aux exigences énoncées ci-dessus.

Définition 1.3.4 On appelle multiplicité d'intersection des courbes planes algébriques affines \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sans composante commune, d'équations respectives f_1 et f_2 , au point P de \mathbb{C}^2 un nombre entier $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, positif ou nul qui vérifie les propriétés 1 à 6 suivantes.

1. $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \nu_P(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$;
2. $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = 0$ si, et seulement si, $P \notin \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$;
3. soit T un changement de coordonnées affines, alors $\nu_{TP}(T\mathcal{C}_1, T\mathcal{C}_2) = \nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, où $T\mathcal{C}_i = V(Tf_i)$ et TP est l'image de P par T ;
4. si $\nu_P(\mathcal{C}_i)$ désigne la multiplicité de la courbe \mathcal{C}_i au point P pour $i = 1, 2$, alors $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \geq \nu_P(\mathcal{C}_1)\nu_P(\mathcal{C}_2)$, et $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \nu_P(\mathcal{C}_1)\nu_P(\mathcal{C}_2)$ si, et seulement si, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 n'ont pas de tangente commune en P ;
5. si $f_1 = \prod f_{1i}^{r_i}$ et $f_2 = \prod f_{2j}^{s_j}$ sont les décompositions respectives en produit de facteurs irréductibles de f_1 et f_2 , et si $\mathcal{C}_{1i} = V(f_{1i})$, de même que $\mathcal{C}_{2j} = V(f_{2j})$, alors

$$\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \sum_{i,j} r_i s_j \nu_P(\mathcal{C}_{1i}, \mathcal{C}_{2j}) ;$$

6. si $\partial^\circ(f_1) \geq \partial^\circ(f_2)$ et si $\mathcal{C} = V(f_1 + Af_2)$ où A est un polynôme quelconque, alors

$$\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \nu_P(\mathcal{C}, \mathcal{C}_2).$$

Une conséquence immédiate de cette définition (les propriétés 2 et 5) est que $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ ne dépend que des composantes des deux courbes passant par le point P .

Remarque 1.3.5 Pour définir la multiplicité d'intersection de deux courbes algébriques planes **projectives** \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , d'équations respectives F_1 et F_2 (qui sont des polynômes homogènes) en un point P du plan projectif, on se place dans une carte affine qui contient le point P , on déshomogénéise F_1 et F_2 et la multiplicité d'intersection $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ des deux courbes projectives au point P est égale à la multiplicité d'intersection des deux courbes affines ainsi obtenues au point P .

Remarque 1.3.6 La propriété 4 de cette définition 1.3.4 implique que si $f_1 = X_2$ et $f_2 = X_1^m$ et si P est le point de coordonnées $(0, 0)$, alors le seul entier possible pour $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ est m , car \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_1 sont deux droites distinctes donc pas tangentes au point P . Après changement de repère, on déduit que pour tout point P , si \mathcal{C}_1 est une droite « simple » d'équation $f_1 = aX_1 + bX_2 + c$, et si la droite d'équation $a'X_1 + b'X_2 + c'$ est distincte de \mathcal{C}_1 , si de plus \mathcal{C}_2 a pour équation $f_2 = (a'X_1 + b'X_2 + c')^m$, alors, $\nu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = m$. Or, on a le lemme 1.3.7.

On désigne par \mathcal{O} l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X_1, X_2]$, et par \mathcal{O}_P le localisé au point P de $\mathbb{C}[X_1, X_2]$, c'est-à-dire l'anneau des fractions rationnelles définies en P , qui est l'anneau des fractions rationnelles de la forme $Q_1(X_1, X_2)/Q_2(X_1, X_2)$ telles que $Q_2(P) \neq 0$ ¹.

¹En fait, on prend le localisé de \mathcal{O} en la partie multiplicative Σ de \mathcal{O} constituée par l'ensemble des polynômes qui ne s'annulent pas au point P et $\mathcal{O}_P = \Sigma^{-1}\mathcal{O}$.

Lemme 1.3.7 Si P est le point de coordonnées $(0, 0)$, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P / \langle X_2, X_1^m \rangle \mathcal{O}_P = m$.

Preuve. L'opération de localisation commute avec l'opération « passage au quotient » (voir par exemple [7]), donc $\mathcal{O}_P / \langle X_2 \rangle \mathcal{O}_P = (\mathbb{C}[X_1, X_2] / \langle X_2 \rangle)_P$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_P / \langle X_2 \rangle \mathcal{O}_P &= \left\{ \frac{P(X_1, 0)}{Q(X_1, 0)}, \text{ avec } P, Q \in \mathbb{C}[X_2, X_2] \text{ et } Q(0, 0) \neq 0 \right\} \\ &\simeq \left\{ \frac{R(X_1)}{S(X_1)}, \text{ avec } R, S \in \mathbb{C}[X_1] \text{ et } S(0) \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Or, si $S(0) \neq 0$, le polynôme S est inversible modulo $\langle X_1^m \rangle$. Donc,

$$\mathcal{O}_P / \langle X_2, X_1^m \rangle \mathcal{O}_P \simeq \mathbb{C}[X_1] / \langle X_1^m \rangle.$$

D'où le lemme. ■

Ce lemme 1.3.7 nous permet de dire qu'un candidat éventuel pour une multiplicité d'intersection des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 est $\dim(\mathcal{O}_P / \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P)$. On démontrera que c'est le cas avec le théorème 1.3.10, qui terminera l'étude qui vient ci-dessous, car il nous faut montrer qu'il existe une et une seule multiplicité d'intersection de deux courbes (vérifiant les propriétés 1 à 6 de la définition 1.3.4). On prouve tout d'abord le théorème 1.3.8, qui donne l'unicité de la multiplicité d'intersection.

Théorème 1.3.8 Soit P un point quelconque; on suppose qu'on dispose de deux familles d'entiers positifs $(\lambda_P)_{((\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in \mathbf{C})}$ et $(\mu_P)_{((\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in \mathbf{C})}$, où \mathbf{C} est l'ensemble des couples de courbes affines planes sans composantes qui vérifient les propriétés 1, 2, 4, 5 et 6. de la définition 1.3.4, alors $\lambda_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, pour tout couple de courbes planes affines sans composante commune $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$.

Preuve. On désigne par (a, b) les coordonnées du point P . On remarque alors tout d'abord que la propriété 2 donne tous les cas où l'entier $\lambda_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ (resp. $\mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$) est nul, et dans ces cas on a donc $\lambda_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = 0$. On montre la proposition par récurrence sur $n = \lambda_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. L'hypothèse de récurrence est la suivante.

Pour tout couple de courbes $(\Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathbf{C}$, d'équations respectives g_1 et g_2 , si $\lambda_P(\Gamma_1, \Gamma_2) < n$, on a $\lambda_P(\Gamma_1, \Gamma_2) = \mu_P(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

Soit deux courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 d'équations respectives f_1 et f_2 , sans composante commune et telles que $\lambda_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = n$. On désigne par r le degré par rapport à $X_1 - a$ du polynôme $f_1(X_1, b)$ et par s celui du polynôme $f_2(X_1, b)$. On peut supposer (grâce à la propriété 1.) qu'on a $r \leq s$.

1er cas. Si $r = 0$, alors $X_2 - b$ divise f_1 et on a $f_1 = (X_2 - b)h$, et donc on doit avoir $n = \lambda_P(V(X_2 - b), \mathcal{C}_2) + \lambda_P(V(h), \mathcal{C}_2)$, d'après la propriété 5. On a $f_2(X_1, b) = (X_1 - a)^m(a_0 + a_1(X_1 - a) + \dots)$ avec $a_0 \neq 0$ et $m > 0$ (car P a pour coordonnées (a, b)). Donc, d'après la propriété 5, on doit avoir

$$\lambda_P(V(X_2 - b), \mathcal{C}_2) = \lambda_P(V(X_2 - b), V((X_1 - a)^m)) + \lambda_P(V(X_2 - b), V(a_0 + a_1(X_1 - a) + \dots)).$$

Or, d'une part $\lambda_P(V(X_2 - b), V((X_1 - a)^m)) = m = \mu_P(V(X_2 - b), V((X_1 - a)^m))$ d'après la propriété 5 et la remarque 1.3.6, et d'autre part, on a $\lambda_P(V(X_2 - b), V(a_0 + a_1(X_1 - a) + \dots)) = 0$ d'après la propriété 2 (car $P \notin V(X_2 - b) \cap V(a_0 + a_1(X_1 - a) + \dots)$). L'entier m est strictement positif. Donc, en appliquant l'hypothèse de récurrence, car l'entier $\lambda_P(V(h), \mathcal{C}_2)$ est strictement plus petit que n , on a $\lambda_P(V(h), \mathcal{C}_2) = \mu_P(V(h), \mathcal{C}_2)$, et, puisque on a également

$$\mu_P(V(X_2 - b), \mathcal{C}_2) = \mu_P(V(X_2 - b), V((X_1 - a)^m)) + \mu_P(V(X_2 - b), V(a_0 + a_1(X_1 - a) + \dots)),$$

on en déduit que $n = \lambda_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$.

2ème cas. Maintenant, le degré r par rapport à $X_1 - a$ de $f_1(X_1, b)$ est strictement positif, et on a encore $r \leq s$. On peut supposer que les polynômes $f_1(X_1, 0)$ et $f_2(X_1, 0)$ sont unitaires en la variable $X_1 - a$, autrement dit qu'on a,

$$f_1(X_1, a) = (X_1 - a)^r + \sum_{j \geq r+1} \alpha_j (X_1 - a)^j \text{ et } f_2(X_1, a) = (X_1 - a)^s + \sum_{j \geq s+1} \beta_j (X_1 - a)^j.$$

On considère le polynôme $h_1 = f_2 - (X_1 - a)^{s-r} f_1$; le degré t_1 par rapport $(X_1 - a)$ du polynôme $h_1(X_1, b)$ est strictement plus petit que s , le degré par rapport à $(X_1 - a)$ de $f_2(X_1, b)$, et on a (propriétés 1 et 6) $\lambda_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \lambda_P(\mathcal{C}_1, V(h_1))$. On itère ce raisonnement en l'appliquant cette fois au couple (f_1, h_1) . On obtient donc une suite de polynômes $h_i(X_1, b)$ dont les degrés par rapport à $(X_1 - a)$ décroissent strictement, ce qui implique qu'au rang i_0 , le degré par rapport à $(X_1 - a)$ de $h_{i_0}(X_1, b)$ est strictement plus petit que r . Alors on continue le même travail et on fait décroître strictement les degrés par rapport à $(X_1 - a)$ du premier élément du couple ou du second (alternativement). A la fin de ce processus, on obtient un couple (g_1, g_2) tel que le degré par rapport à $(X_1 - a)$ de $g_1(X_1, b)$ est nul et tel que $\lambda_P(V(g_1), V(g_2)) = \lambda_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. Pour (g_1, g_2) on est dans le premier cas, donc $\lambda_P(V(g_1), V(g_2)) = \mu_P(V(g_1), V(g_2))$, et (car le raisonnement ci-dessus s'applique aussi à $\mu(,)$) on a aussi $\mu_P(V(g_1), V(g_2)) = \mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. ce qui termine la preuve du théorème.

Ce qui termine la preuve du théorème. ■

Remarque 1.3.9 Ce théorème permet de parler de **LA** multiplicité d'intersection de deux courbes algébriques en un point : la propriété 3 implique en effet de plus que cette multiplicité ne dépend pas du repère choisi pour décrire les courbes par des équations algébriques.

Théorème 1.3.10 (voir en particulier [4]) *On garde les hypothèses et les notations de la définition 1.3.4. Si, pour tout couple de courbes $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ sans composante commune, on désigne l'entier $\dim_{\mathbb{A}}(\mathcal{O}_P / \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P)$ par $\mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, alors les entiers $\mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ vérifient les propriétés 1. à 6. de la définition 1.3.4.*

Pour pouvoir démontrer ce théorème, il nous faut démontrer quelques résultats préliminaires.

Proposition 1.3.11 *Soit I un idéal de $\mathcal{O} = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Soit $V(I) = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid \forall f \in I, f(Q) = 0\}$; on suppose que cet ensemble $V(I)$ est fini, et on note $V(I) = \{P_1, \dots, P_N\}$. Alors, si \mathcal{O}_{P_i} , pour $1 \leq i \leq N$ désigne le localisé en P_i de l'anneau \mathcal{O} ,*

$$\mathcal{O}/I = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I \simeq \prod_{i=1}^N \mathcal{O}_{P_i}/I\mathcal{O}_{P_i}.$$

Preuve. On définit un morphisme $\varphi : A = \mathcal{O}/I \rightarrow \prod_{i=1}^N \mathcal{O}_{P_i}/I\mathcal{O}_{P_i}$ en remarquant qu'on a, pour chaque i , $1 \leq i \leq N$, un morphisme $\psi_i : \mathcal{O}/I \rightarrow \mathcal{O}_{P_i}/I\mathcal{O}_{P_i}$, qui est obtenu par composition du morphisme injectif naturel α_i de \mathcal{O} dans \mathcal{O}_{P_i} et de la surjection canonique β_i de \mathcal{O}_{P_i} sur $\mathcal{O}_{P_i}/I\mathcal{O}_{P_i}$. Ce morphisme ψ_i induit un morphisme φ_i de \mathcal{O}/I dans $\mathcal{O}_{P_i}/I\mathcal{O}_{P_i}$ par passage au quotient; en effet, $I \subset \ker(\psi_i)$ car si $f \in \mathcal{O}$

$$\begin{aligned} \beta_i(\alpha_i(f)) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f}{1} \in I\mathcal{O}_{P_i} \\ &\Leftrightarrow \frac{f}{1} = \frac{g}{h}, g \in I, h(P_i) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \text{ tel que } k(P_i) \neq 0 \text{ et } k(fh - g) = 0 \\ &\Leftrightarrow fh = g \in I, \text{ car } k \neq 0 \end{aligned}$$

Mais $V(I) = \{P_1, \dots, P_N\}$, donc $g(P_i) = 0$ et puisque $h(P_i) \neq 0$, $f(P_i) = 0$. Donc, puisque tout élément f de I vérifie $f(P_i) = 0$, on a bien $I \subset \ker(\psi_i)$

On prend pour φ le produit de ces N morphismes φ_i . On va montrer que ce morphisme φ est un isomorphisme.

Lemme 1.3.12 *Il existe N éléments e_1, \dots, e_N de \mathcal{O}/I qui vérifient*

1. $e_i^2 = e_i$ (e_i est donc un idempotent de \mathcal{O}/I);
2. $e_i e_j = 0$ pour $i \neq j$;
3. $\sum_{i=1}^N e_i = 1$.

Les éléments e_1, \dots, e_N , parce qu'ils vérifient ces trois propriétés, forment un système fondamental d'idempotents (sfio) de l'anneau \mathcal{O}/I .

Preuve. Le radical \sqrt{I} de l'idéal I est égal à $\bigcap_{1 \leq i \leq N} I_i$, où I_i désigne l'idéal $I(\{P_i\})$, ensemble des polynômes

qui s'annulent en P_i , qui est un idéal maximal. Or, (voir aussi [9] proposition 9.98) $\bigcap_{1 \leq i \leq N} I_i = \prod_{1 \leq i \leq N} I_i$. En effet,

$\left(\bigcap_{j \neq i} I_j\right) + I_i = A$, car, sinon, on sait d'une part que I_i est contenu dans $\left(\bigcap_{j \neq i} I_j\right) + I_i$; d'autre part I_i est un

idéal maximal, $I_i = \left(\bigcap_{j \neq i} I_j\right) + I_i$. Donc, $I_i \subset \bigcap_{j \neq i} I_j \subset I_{j_0}$ (où $j_0 \neq i$), ce qui implique (à cause de la maximalité

de ces deux idéaux) $I_i = I_{j_0}$, ce qui est faux. Or, de manière générale, dans un anneau commutatif unitaire A , si deux idéaux I et J vérifient $I + J = A$, alors $IJ = I \cap J$. En effet, il est clair que $IJ \subset I \cap J$; réciproquement, si

$x \in I \cap J$, alors, puisque $I + J = A$, on peut écrire $1 = ui + vj$, avec $(i, j) \in (I \times J)$, $(u, v) \in A^2$, et $x = xui + xvj$, avec xui et xvj qui sont dans IJ , ce qui implique que $x \in IJ$ et $IJ \subset I \cap J$. Donc, $\left(\bigcap_{1 \leq j \leq N} I_j\right) = \left(\bigcap_{j \neq i} I_j\right) \cdot I_i$.

Et (on finit par récurrence) $\bigcap_{i=1}^N I_i = \prod_{i=1}^N I_i$.

Il existe donc un entier q tel que $\left(\prod_{i=1}^N I_i\right)^q \subset I$. Soit, pour $1 \leq i \leq N$, F_i un polynôme qui vérifie $F_i(P_j) = \delta_{i,j}$ (il en existe toujours, car $I(\{P_1, \dots, P_N\} \setminus \{P_i\}) \neq I(\{P_1, \dots, P_N\})$), et soit

$$E_i = 1 - (1 - F_i^q)^q.$$

On remarque que $E_i = F_i^q D_i$ (où D_i est un polynôme); donc, E_i est élément de l'idéal $\left(\bigcap_{j \neq i} I_j\right)^q$. Par ailleurs,

$1 - E_i = (1 - F_i^q)^q$ et $F_i(P_i) = 1$ donc $1 - E_i \in I_i^q$. On en déduit que $1 - \sum_{i=1}^N E_i = 1 - E_i - \sum_{j \neq i} E_j$ est dans

I_i^q , ceci pour tout $1 \leq i \leq N$. Donc, $1 - \sum_{i=1}^N E_i \in \left(\bigcap_{i=1}^N I_i\right)^q$.

Notons e_i l'image de E_i dans \mathcal{O}/I , pour $1 \leq i \leq N$, et vérifions que e_1, \dots, e_N vérifient les conditions du lemme.

1. On a $E_i^2 - E_i = E_i(E_i - 1)$, d'où on déduit $e_i^2 = e_i$ car $E_i \in \left(\bigcap_{j \neq i} I_j\right)^q$ et $E_i - 1 \in I_i^q$, ce qui implique que $E_i^2 - E_i \in \left(\bigcap_{j=1}^N I_j\right)^q \subset I$.
2. Si $i \neq j$, $E_i E_j \in \left(\bigcap_{k \neq i} I_k\right)^q \left(\bigcap_{k \neq j} I_k\right)^q = \left(\bigcap_{k=1}^N I_k\right)^q \subset I$. Donc, $e_i e_j = 0$.
3. On a vu que $1 - \sum_{i=1}^N E_i \in \left(\bigcap_{i=1}^n I_i\right)^q$, ce qui implique la troisième propriété du lemme, et termine la preuve de ce lemme. ■

Lemme 1.3.13 Soit $i \in [1, N]$, G un élément de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, et g l'image de G dans \mathcal{O}/I . Si $G(P_i) \neq 0$, il existe $t \in \mathcal{O}/I$ tel que $e_i = tg$.

Preuve. On peut supposer que $G(P_i) = 1$; alors, $1 - G = H \in I_i$. On a

$$E_i(1 - H^q) = (1 - H)(E_i + E_i H + \dots + E_i H^{q-1})$$

Or, $E_i \in \left(\bigcap_{j \neq i} I_j\right)^q$ et $H^q \in I_i^q$. Donc, $H^q E_i \in \left(\bigcap_{j=1}^N I_j\right)^q \subset I$. Donc, car

$$E_i - E_i H^q = G(E_i + E_i H + \dots + E_i H^{q-1})$$

on a

$$e_i = g(e_i + e_i h + \dots + e_i h^{q-1})$$

où h désigne l'image de H dans \mathcal{O}/I . On prend

$$t = (e_i + e_i h + \dots + e_i h^{q-1}).$$
■

On dispose maintenant des éléments qui permettent de montrer que le morphisme φ est un isomorphisme.

◇ $\ker \varphi = \{0\}$. En effet, si f est un élément de \mathcal{O}/I vérifiant $\varphi(f) = 0$, cela veut dire que pour tout $1 \leq i \leq N$, $\varphi_i(f) = 0$. Il existe donc, pour tout $1 \leq i \leq N$ un polynôme G_i , élément de \mathcal{O} , tel que $G_i(P_i) \neq 0$ et vérifiant $G_i F \in I$ où F est un représentant de f dans \mathcal{O} . On a donc, si g_i est l'image de G_i dans \mathcal{O}/I , $g_i \neq 0$. D'après le lemme 1.3.13, il existe $t_i \in \mathcal{O}/I$, image de $T_i \in \mathcal{O}$, tel que $e_i = t_i g_i$. Or, $T_i G_i F \in I$, donc $t_i g_i f = 0$. On peut

écrire $f = \left(\sum_{i=1}^N e_i\right) f$ car $\sum_{i=1}^N e_i = 1$. On a donc $f = \sum_{i=1}^N (t_i g_i f) = 0$ et $f = 0$.

◇ Le morphisme φ est surjectif. En effet remarquons tout d'abord que, puisque $E_i(P_i) \neq 0$, $\varphi_i(e_i)$ est inversible. D'autre part, on a $\varphi_i(e_i e_j) = 0$ lorsque $i \neq j$, ce qui implique que $\varphi_i(e_j) = 0$ pour $i \neq j$. Donc, $\varphi_i(e_i) = \varphi_i\left(\sum_{j=1}^N e_j\right) = \varphi_i(1) = 1$.

Soit \bar{z} un élément de $\prod_{i=1}^N \mathcal{O}_{P_i}/I\mathcal{O}_{P_i}$ et $z \in \mathcal{O}_{P_i}$ un représentant de \bar{z} .

Cet élément z s'écrit $z = (a_1/s_1, \dots, a_N/s_N)$, où a_i et s_i sont des éléments de \mathcal{O}/I tels que S_i , représentant de s_i , n'est pas dans I_i , pour $1 \leq i \leq N$. On a donc $S_i(P_i) \neq 0$ et en appliquant le lemme 1.3.13, on déduit l'existence de $T_i \in \mathcal{O}$ tel que $s_i t_i = e_i$, où t_i est l'image de T_i dans \mathcal{O}/I . On a $\varphi_i(e_i) = 1$, donc, $t_i s_i = 1$ dans $(\mathcal{O}/I)_{P_i}$. D'où l'on déduit que $a_i t_i = a_i/s_i$ dans $(\mathcal{O}/I)_{P_i}$. On a donc

$$\varphi_i\left(\sum_{j=1}^N a_j t_j e_j\right) = \varphi_i(a_i t_i) = a_i/s_i.$$

Ce qui implique

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^N a_j t_j e_j\right) = \bar{z}.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition 1.3.11. ■

De cette proposition on déduit immédiatement le corollaire suivant, qui implique que si, pour tout couple de courbes $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ sans composante commune, on note $\mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_P/\langle f_1, f_2 \rangle)$, $\mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ est fini.

Corollaire 1.3.14

$$\dim \mathcal{O}/I = \sum_{i=1}^N \dim \mathcal{O}_{P_i}/I\mathcal{O}_{P_i}.$$

Preuve du théorème 1.3.10. On voit déjà que, si P a pour coordonnées $(0, 0)$, $\mu_P(V(X_2), V(X_1^m)) = m$, ce qui est conforme à ce que l'on doit avoir, d'après la remarque 1.3.6. Par ailleurs on vérifie facilement la propriété 1.

Pour la propriété 2, on remarque² que

$$P \notin \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow f_1(P) \neq 0 \text{ ou } f_2(P) \neq 0 \Leftrightarrow 1_{\mathcal{O}_P} \in \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P \Leftrightarrow \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_P \Leftrightarrow \mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = 0.$$

Pour montrer la propriété 6, il suffit de montrer que $\langle f_1 + Af_2, f_2 \rangle \mathcal{O}_P = \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$.

1. Il est clair que $\langle f_1 + Af_2, f_2 \rangle \mathcal{O}_P \subset \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$.

2. Pour montrer que $\langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P \subset \langle f_1 + Af_2, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$, il suffit de montrer que $f_1 \in \langle f_1 + Af_2, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$; or dans \mathcal{O}_P , $\frac{f}{1} = \frac{f_1 + Af_2 + (f_1 - A)f_2}{f_2 + 1}$ et $f_2(P) = 0$ donc $(f_2 + 1)(P) = 1 \neq 0$. Ce qui donne le résultat.

Montrons la propriété 3. Elle se déduit du lemme suivant.

Lemme 1.3.15 *Soit T un changement de coordonnées affines de \mathbb{C}^n , c'est-à-dire une application affine $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Soit $P \in \mathbb{C}^n$ et $Q = T(P)$. Soit $\tilde{T} : \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_P$ le morphisme induit par T . Ce morphisme \tilde{T} est un isomorphisme.*

Preuve du lemme. On remarque que le morphisme $T^* : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ induit par T est défini par, si $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$,

$$g(X_1, X_2) = T^* f(X_1, X_2) = f(T(X_1, X_2)).$$

On a bien $T^*(fh) = T^*(f)T^*(h)$ et $T^*(f+h) = T^*(f) + T^*(h)$. Si f s'annule au point Q , $g = T^* f$ s'annule au point P . Par ailleurs, T^* induit un isomorphisme entre l'idéal $\langle f_1, f_2 \rangle$ et son image par T . D'où le lemme. ■

²Montrons que $f_1(P) \neq 0$ ou $f_2(P) \neq 0 \Leftrightarrow 1_{\mathcal{O}_P} \in \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$; si $f_1(P) \neq 0$, alors f_1 est inversible dans \mathcal{O}_P , ce qui prouve que $1_{\mathcal{O}_P} \in \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$. Réciproquement, si $1 = \frac{r_1}{s_1} f_1 + \frac{r_2}{s_2} f_2$ alors $s_1 s_2 = f_1 r_1 + f_2 r_2$ et $(s_1 s_2)(P) \neq 0$, donc $f_1(P) \neq 0$ ou $f_2(P) \neq 0$.

On peut maintenant supposer que le point P a pour coordonnées $(0, 0)$.

Pour démontrer la propriété 5, il suffit de montrer que si \mathcal{C}'_1 et \mathcal{C}''_1 sont deux courbes algébriques affines d'équations respectives f'_1 et f''_1 sans composante commune avec \mathcal{C}_2 , et si \mathcal{C}_1 est la courbe algébrique affine d'équation $f'_1 f''_1$ (avec \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 toujours sans composante commune), alors

$$\mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \mu_P(\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}_2) + \mu_P(\mathcal{C}''_1, \mathcal{C}_2).$$

Pour cela, il suffit de montrer que la suite de \mathcal{O} -modules suivante est exacte (ce qui donne une suite exacte par localisation au point P) :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}/\langle f'_1, f_2 \rangle \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}/\langle f'_1 f''_1, f_2 \rangle \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}/\langle f''_1, f_2 \rangle \rightarrow 0.$$

Les morphismes φ et ψ sont définis comme suit :

1. Le morphisme φ envoie l'élément \bar{p} de $\mathcal{O}/\langle f'_1, f_2 \rangle$ sur l'image du polynôme $f''_1 p$ dans $\mathcal{O}/\langle f'_1 f''_1, f_2 \rangle$ (p désigne un représentant de \bar{p} dans \mathcal{O}) ; ce morphisme est injectif, car si $f''_1 p$ est dans l'idéal $\langle f'_1 f''_1, f_2 \rangle$, c'est que p est dans l'idéal $\langle f'_1, f_2 \rangle$. En effet, on a alors $f''_1 p = a f'_1 f''_1 + b f_2$. On sait par hypothèse que $f'_1 f''_1$ et f_2 n'ont pas de facteur commun (car \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont sans composante commune), f''_1 divise b et $b = b_1 f''_1$, d'où $p = a f'_1 + b_1 f_2$.
2. Le morphisme ψ est la surjection naturelle de $\mathcal{O}/\langle f'_1 f''_1, f_2 \rangle$ sur $\mathcal{O}/\langle f''_1, f_2 \rangle$ donnée par $\psi(\bar{p}) = \tilde{p}$, où p désigne un représentant de \bar{p} dans \mathcal{O} , et \tilde{p} est l'image de p dans $\mathcal{O}/\langle f''_1, f_2 \rangle$. (Notons que ce morphisme est bien défini et est surjectif car $\langle f'_1 f''_1, f_2 \rangle \subset \langle f''_1, f_2 \rangle$).

Par définition de ces deux morphismes, il est clair que $\text{Im} \psi \subset \ker \psi$. Montrons que cette inclusion est une égalité. Soit p un élément de \mathcal{O} et notons \tilde{p} son image dans $\mathcal{O}/\langle f''_1, f_2 \rangle$, et \bar{p} son image dans $\mathcal{O}/\langle f'_1, f_2 \rangle$; si $\psi(\tilde{p}) = 0$, alors p s'écrit $p = f''_1 p_1 + f_2 p_2$ et donc, $\tilde{p} = f''_1 p_1$, c'est-à-dire $\tilde{p} = \varphi(\bar{p}_1)$. La suite $(*)$ est donc bien exacte.

Il reste maintenant à montrer la propriété 4. On désigne par $\nu_P(\mathcal{C}_i)$ la multiplicité de la courbe \mathcal{C}_i au point P pour $i = 1, 2$. Il faut montrer que $\mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \geq \nu_P(\mathcal{C}_1) \nu_P(\mathcal{C}_2)$, et $\mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \nu_P(\mathcal{C}_1) \nu_P(\mathcal{C}_2)$ si, et seulement si, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 n'ont pas de tangente commune en P .

Soit $m_i = \nu_P(\mathcal{C}_i)$, pour $i = 1, 2$. On désigne par $\psi : \mathcal{O}/\langle X_1, X_2 \rangle^{m_1} \times \mathcal{O}/\langle X_1, X_2 \rangle^{m_2} \rightarrow \mathcal{O}/\langle X_1, X_2 \rangle^{m_1+m_2}$ le morphisme de \mathbb{C} espaces vectoriels défini par

$$\psi(\bar{h}_1, \bar{h}_2) = \overline{h_1 f_2 + h_2 f_1},$$

et soit $\varphi : \mathcal{O}/\langle X_1, X_2 \rangle^{m_1+m_2} \rightarrow \mathcal{O}/\langle \langle X_1, X_2 \rangle^{m_1+m_2}, f_1, f_2 \rangle$, la surjection canonique (qui est aussi un morphisme de \mathbb{C} espaces vectoriels). Soit $\bar{h} \in \ker \varphi$; on a $\varphi(\bar{h}) = 0$, ce qui veut dire de manière équivalente que, si h désigne un représentant de \bar{h} dans \mathcal{O} , $h \in \langle \langle X_1, X_2 \rangle^{m_1+m_2}, f_1, f_2 \rangle$, i.e. $h = h_0 + h_1 f_2 + h_2 f_1$, avec $h_0 \in \langle X_1, X_2 \rangle^{m_1+m_2}$, c'est-à-dire

$$\bar{h} = \overline{h_1 f_2 + h_2 f_1} = \psi(\bar{h}_1, \bar{h}_2).$$

Donc $\ker \varphi = \text{Im} \psi$ car $\text{Im} \psi \subset \ker \varphi$. On a donc le diagramme suivant, où les deux lignes horizontales sont des suites exactes de \mathbb{C} espaces vectoriels et I désigne l'idéal $\langle X_1, X_2 \rangle$, c'est-à-dire l'idéal $I(\{P\})$ des polynômes qui s'annulent au point P .

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}/I^{m_1} \times \mathcal{O}/I^{m_2} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{O}/I^{m_1+m_2} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}/\langle I^{m_1+m_2}, f_1, f_2 \rangle & \rightarrow & 0 \\ & & & & \alpha \downarrow & & \\ \mathcal{O}_P/\langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}_P/\langle I^{m_1+m_2}, f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

Le morphisme π est la surjection canonique, le morphisme α est l'isomorphisme décrit dans la proposition 1.3.11 (car $V(\langle I^{m_1+m_2}, f_1, f_2 \rangle) = \{P\}$). Parce que les deux suites sont exactes, on a les inégalités et les égalités suivantes (les dimensions ici sont les dimensions des \mathbb{C} espaces vectoriels considérés).

$$(*) \quad \mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \dim(\mathcal{O}_P / \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P) \geq \dim(\mathcal{O}_P / \langle I^{m_1+m_2}, f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P), \text{ car } \pi \text{ est surjective}$$

$$\dim(\mathcal{O}_P / \langle I^{m_1+m_2}, f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P) = \dim(\mathcal{O} / \langle I^{m_1+m_2}, f_1, f_2 \rangle), \text{ car } \alpha \text{ est un isomorphisme}$$

$$(**) \quad \dim(\mathcal{O} / \langle I^{m_1+m_2}, f_1, f_2 \rangle) \geq \dim(\mathcal{O} / I^{m_1+m_2}) - (\dim(\mathcal{O} / I^{m_1}) + \dim(\mathcal{O} / I^{m_2})), \text{ car la première ligne est exacte.}$$

Or, la dimension de \mathcal{O} / I^q est égale à la somme des dimensions des \mathbb{C} espaces vectoriels des polynômes homogènes de degré r , pour $0 \leq r \leq q-1$. Pour un entier fixé $r \geq 0$, la dimension de ce \mathbb{C} espace vectoriel est égale au nombre de monômes homogènes de degré r en les deux variables X_1 et X_2 , c'est-à-dire à $r+1$. Donc, $\dim(\mathcal{O} / I^q) = \sum_{r=0}^{q-1} r+1 = \frac{q(q+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{O} / I^{m_1+m_2}) - (\dim(\mathcal{O} / I^{m_1}) + \dim(\mathcal{O} / I^{m_2})) = m_1 m_2 = \nu_P(\mathcal{C}_1) \nu_P(\mathcal{C}_2)$. On a donc l'inégalité cherchée

$$(\dagger) \quad \mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \geq \nu_P(\mathcal{C}_1) \nu_P(\mathcal{C}_2).$$

Reste à montrer que l'égalité est obtenue si, et seulement si, les deux courbes n'ont pas de tangentes communes, ce qui est le cas si, et seulement si, les inégalités (*) et (**) sont des égalités. Cela est une conséquence des deux lemmes ci-dessous.

Lemme 1.3.16 *Si \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 n'ont pas de tangentes communes, alors, pour $q \geq m_1 + m_2 - 1$, l'idéal $\mathcal{O}_P I^q$ est inclus dans l'idéal $\langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$.*

Avant de montrer ce lemme, remarquons qu'il implique que le morphisme π est un isomorphisme, et donc que l'inégalité (\dagger) est une égalité.

Preuve du lemme 1.3.16. On désigne par $\{\ell_{1,i}, 1 \leq i \leq m_1\}$ et $\{\ell_{2,i}, 1 \leq i \leq m_2\}$ les équations des tangentes en P à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 respectivement. Ce sont des formes linéaires en X_1 et X_2 , car P a pour coordonnées $(0, 0)$, et l'hypothèse « les deux courbes n'ont pas de tangentes communes en P » se traduit par le fait que pour tout $1 \leq k \leq m_1$ et tout $1 \leq \ell \leq m_2$, les formes linéaires $\ell_{1,k}$ et $\ell_{2,\ell}$ ne sont pas proportionnelles, et donc ne s'annulent pas simultanément. Alors, si d'une part on pose

$$\ell_{1,k} = \ell_{1,m_1} \text{ pour } k > m_1 \text{ et } \ell_{2,\ell} = \ell_{2,m_2} \text{ pour } \ell > m_1$$

et d'autre part on définit

$$L_{i,j} = \prod_{k=1}^i \ell_{1,k} \prod_{h=1}^j \ell_{2,h}, \text{ pour } 1 \leq i \leq q \text{ et } 1 \leq j \leq q,$$

avec $L_{0,j} = \prod_{h=1}^j \ell_{2,h}$, la famille $(L_{i,j})_{i+j=q}$ est une base du \mathbb{C} espace vectoriel des polynômes homogènes de degré q en X_1 et X_2 . En effet, la dimension de cet espace vectoriel est $q+1$ et la famille en question est formée d'exactly $q+1$ éléments. Il suffit donc de démontrer que cette famille est libre. Or, si $\sum_{i=0}^q \lambda_i L_{i,q-i} = 0$, en substituant à (X_1, X_2) le zéro (x_1, x_2) de $\ell_{1,1}$, qui n'est pas zéro de $\ell_{2,h}$ pour tout h , on obtient immédiatement $\lambda_0 = 0$. Si $\ell_{1,1}$ et $\ell_{1,2}$ ne sont pas proportionnelles, en substituant à (X_1, X_2) le zéro (x_1, x_2) de $\ell_{1,2}$, qui n'est pas zéro de $\ell_{2,h}$ pour tout h , on obtient immédiatement $\lambda_1 = 0$. Si $\ell_{1,1}$ et $\ell_{1,2}$ sont proportionnelles, on commence par simplifier par $\ell_{1,2}$ puis on en substitue à (X_1, X_2) le zéro (x_1, x_2) de $\ell_{1,2}$, ce qui donne encore $\lambda_1 = 0$. On itère ce procédé, ce qui prouve que tous les λ_i , pour $0 \leq i \leq q$ sont nuls.

Reste donc, pour démontrer le lemme, à vérifier que l'image de $L_{i,j}$ dans \mathcal{O}_P est dans l'idéal $\langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$, pour $i + j \geq m_1 + m_2 - 1$. Dans ce cas ($i + j \geq m_1 + m_2 - 1$), on peut supposer que $i \geq m_1$ et on a

$$L_{i,j} = \prod_{k=1}^{m_1} \ell_1^k (\ell_1^{m_1})^{i-m_1} B' = L_{m_1,0} (\ell_1^{m_1})^{i-m_1} B' = L_{m_1,0} B$$

où B est un polynôme de degré $i + j - m_1$. Mais (voir la remarque 1.2.21), on peut écrire $f_1 = L_{m_1,0} + g_1$ où g_1 est un polynôme de degré au moins $m_1 + 1$. Ce qui implique

$$L_{i,j} = f_1 B - g_1 B.$$

Le polynôme $g_1 B$ est une somme de monômes de degré au moins $i + j + 1$, et est donc une combinaison linéaire des $L_{k,\ell}$, pour $k + \ell \geq i + j + 1$. On peut donc écrire, pour tout $r \geq m_1 + m_2 + 1$ le polynôme $L_{i,j}$ sous la forme

$$L_{i,j} = C f_1 + D f_2 + E,$$

où le polynôme E est une somme de monômes de degré au moins r , ceci en itérant le procédé décrit ci-dessus. Montrons que, pour r suffisamment grand, l'image de E dans \mathcal{O}_P est dans l'idéal $\langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$. Pour cela il suffit de remarquer que si h est un polynôme qui s'annule en tous les points de $V(\langle f_1, f_2 \rangle) = \{P, P_1, \dots, P_s\}$, sauf en P , alors hX_1 et hX_2 sont dans $I(V(\langle f_1, f_2 \rangle))$, et le théorème des zéros implique qu'il existe N un entier vérifiant $(hX_1)^N \in \langle f_1, f_2 \rangle$ ainsi que $(hX_2)^N \in \langle f_1, f_2 \rangle$. Mais h ne s'annule pas en P , et son image dans \mathcal{O}_P n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_P / \langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$, et donc les images de X_1^N et X_2^N dans \mathcal{O}_P sont dans $\langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$. Ce qui prouve que pour $r \geq 2N$, l'image du polynôme E est dans $\langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$. Ce qui implique que pour $i + j \geq m_1 + m_2 - 1$, l'image de $L_{i,j}$ dans \mathcal{O}_P est dans l'idéal $\langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_P$. ■

Pour montrer que l'inégalité (**) est une égalité, il suffit de montrer que le morphisme ψ est injectif. On a le lemme suivant.

Lemme 1.3.17 *Le morphisme ψ est injectif si, et seulement si, les deux courbes n'ont pas de tangentes communes en P .*

Preuve. Supposons que les deux courbes ont des tangentes distinctes en P , et supposons également que $\psi(\bar{h}_1, \bar{h}_2) = 0$. Cela veut dire que $f_2 h_1 + f_1 h_2 = 0$ modulo l'idéal $I^{m_1+m_2}$. Le polynôme $f_2 h_1 + f_1 h_2$ est donc une somme de monômes de degré au moins $m_1 + m_2$. Mais $f_1 = L_{m_1,0} + g_1$ et $f_2 = L_{m_2,0} + g_2$, où les polynômes g_1 et g_2 sont de degré au moins égal à $m_1 + 1$ et $m_2 + 1$ respectivement. D'autre part, on peut écrire $h_1 = h_{1,r} + h'_1$ et $h_2 = h_{2,s} + h'_2$, où h'_1 et h'_2 sont des polynômes de degrés au moins égaux à $r + 1$ et $s + 1$ respectivement, et $h_{1,r}$ et $h_{2,s}$ sont homogènes de degré respectif r et s . On a donc, après identification, $r + m_2 = s + m_1$ et $h_{1,r} L_{m_2,0} = -h_{2,s} L_{m_1,0}$. Mais, puisque les deux courbes n'ont pas de tangentes communes, $L_{m_2,0}$ divise $h_{2,s}$ et $L_{m_1,0}$ divise $h_{1,r}$. Donc, $r \geq m_1$ et $s \geq m_2$, ce qui implique que $(\bar{h}_1, \bar{h}_2) = (0, 0)$. Sous cette hypothèse (pas de tangentes communes aux deux courbes), le morphisme ψ est injectif.

Par contre, si les deux courbes ont au moins une tangente commune, d'équation ℓ (qui est une forme linéaire en (X_1, X_2)), alors $L_{m_1,0} = \ell L'_{m_1,0}$ et $L_{m_2,0} = \ell L'_{m_2,0}$, où $L'_{m_1,0}$ et $L'_{m_2,0}$ sont de degrés respectifs $m_1 - 1$ et $m_2 - 1$. On a donc $(-L'_{m_1,0}, L'_{m_2,0}) \neq (0, 0)$ et $L'_{m_2,0} f_1 - L'_{m_1,0} f_2 \in I^{m_1+m_2}$. Ainsi, $\psi(-L'_{m_1,0}, L'_{m_2,0}) = 0$. Le morphisme ψ n'est donc pas injectif. Ce qui achève la preuve de ce lemme 1.3.17. ■

Le lemme 1.3.17 termine la preuve de la propriété 4.

Les six propriétés de la définition 1.3.4 sont démontrées pour $\mu_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, ce qui prouve le théorème 1.3.10. ■

1.3.3 Théorème de Bézout

Soit \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux courbes planes projectives d'équations respectives F_1 et F_2 , de degrés respectifs m_1 et m_2 , sans composante commune. Le but de ce paragraphe est de montrer le célèbre théorème de Bézout, et pour cela il faut revenir à l'une des idées évoquées au paragraphe précédent : il serait souhaitable de disposer d'une description de la multiplicité d'intersection de deux courbes qui soit de même type que celle qu'on a pour la multiplicité d'intersection d'une droite et d'une courbe.

Démontrons tout d'abord le théorème suivant qui est une première indication quant au nombre de points d'intersection de deux courbes projectives.

Théorème 1.3.18 *Soit \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux courbes algébriques projectives planes d'équation respectives F_1 et F_2 , de degré respectif m_1 et m_2 . On suppose que les deux courbes sont sans composantes communes. Alors le nombre de points d'intersection de ces deux courbes est inférieur ou égal à $m_1 \times m_2$.*

Preuve. On choisit tout d'abord un point Q en dehors de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , ainsi qu'une droite L qui ne contient pas le point Q et qui n'est composante ni de \mathcal{C}_1 ni de \mathcal{C}_2 . On choisit le repère projectif dans le plan de telle sorte que le point Q ait pour coordonnées homogènes $(0; 0; 1)$ et la droite L ait pour équation $L = \{X_2 = 0\}$. On définit la projection π du plan $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ privé du point Q sur la droite L par la construction suivante : $\pi(M)$ est, pour $M \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{Q\}$, le point d'intersection de la droite (QL) avec la droite L^3 . Si M a pour coordonnées homogènes $(x_0; x_1; x_2)$ dans le repère choisi, alors $\pi(M)$ a pour coordonnées homogènes $(x_0; x_1; 0)$. Les équations des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont dans ce repère respectivement $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$, où F_1 et F_2 sont des polynômes homogènes de degré respectif m_1 et m_2 . Puisque Q n'est ni sur \mathcal{C}_1 ni \mathcal{C}_2 , si on écrit ces deux équations suivant les puissances décroissantes de X_2 ,

$$F_1 = \sum_{i=0}^{m_1} A_{m_1-i} X_2^i, \quad F_2 = \sum_{j=0}^{m_2} B_{m_2-j} X_2^j$$

où les A_i sont des polynômes homogènes en X_0 et X_1 de degré $m_1 - i$, les B_j sont des polynômes homogènes en X_0 et X_1 de degré $m_2 - j$, les polynômes A_0 et B_0 ne sont pas nuls : s'ils l'étaient, alors par exemple $F_1(Q) = A_0(0, 0) = 0$ car tous les autres coefficients $A_i(0, 0)$ sont nuls (les A_i sont homogènes de degré $i > 0$), ce qui contredit le fait que $Q \notin \mathcal{C}_1$. Ce qui implique que le résultant $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)$ est un polynôme homogène en X_0, X_1 de degré $m_1 \times m_2$.

Soit P un point d'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , de coordonnées homogènes $(c_0; c_1; c_2)$; on a $F_i(c_0, c_1, c_2) = 0$ pour $i = 1, 2$, donc $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)(c_0, c_1) = 0$. Réciproquement si $(c_0; c_1; 0)$ sont les coordonnées homogènes d'un point C de la droite L , si $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)(c_0, c_1) = 0$, alors C est l'image par π d'un point de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

On fait un choix supplémentaire : le point Q n'est situé sur aucune des droites joignant deux points d'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Ceci est possible puisque nous savons déjà (voir 1.3.1) que deux courbes sans composante commune se coupent en un nombre fini de points. Ainsi chaque point d'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 correspond à un point et un seul sur la droite L (son image par π), et ce point est un zéro de $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)$ qui est de degré $m_1 \times m_2$. Il y a donc au plus $m_1 \times m_2$ points d'intersection entre \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . ■

Théorème 1.3.19 *Soit \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux courbes algébriques projectives planes d'équation respectives F_1 et F_2 , de degré respectif m_1 et m_2 sans composante commune. On suppose que les conditions suivantes sont réalisées.*

- (★₁) *Le point Q de coordonnées homogènes $(0; 0; 1)$ n'est pas dans $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$;*
- (★₂) *Le point Q de coordonnées homogènes $(0; 0; 1)$ n'appartient à aucune des droites joignant deux points distincts de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$;*
- (★₃) *Le point Q de coordonnées homogènes $(0; 0; 1)$ n'appartient à aucune des tangentes à \mathcal{C}_1 ou \mathcal{C}_2 en un point de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.*

³Il s'agit bien là d'une projection au sens affine, si on décide que le point Q est sur la droite de l'infini : l'application π est la projection sur la droite L parallèlement à la direction donnée par Q .

Soit $\{P_1, \dots, P_N\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, et on note (a_i, b_i, c_i) les coordonnées homogènes du point P_i , pour $i = 1, \dots, N$. Alors,

- $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2) = C \prod_{i=1}^N (b_i X_0 - a_i X_1)^{s_i}$, où C est une constante complexe et s_i est un entier strictement positif.
- La multiplicité d'intersection $\nu_{P_i}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 au point P_i est égale à l'entier s_i .

Preuve. (voir par exemple [6] et [1])

– Remarquons tout d'abord qu'on sait (théorème 1.3.1) que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est un ensemble fini, et on note N son cardinal.

– Soit $i \in [1, N]$. Puisque $P_i \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, on sait que $F_1(a_i, b_i, c_i) = F_2(a_i, b_i, c_i) = 0$, ce qui implique que $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)(a_i, b_i) = 0$. Le polynôme $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)$ est un polynôme homogène en (X_0, X_1) (de degré $m_1 m_2$

en raison de la condition \star_1); on peut écrire $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2) = \prod_{k=1}^{m_1 m_2} (\alpha_k X_0 + \beta_k X_1)$, et il existe k_i tel que

$\alpha_{k_i} a_i + \beta_{k_i} b_i = 0$. On peut donc prendre (modulo constante multiplicative) $\alpha_{k_i} = b_i$ et $\beta_{k_i} = -a_i$, et on voit que $b_i X_0 - a_i X_1$ divise $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)$. De plus, si $i \neq j$, $a_i b_j - b_i a_j \neq 0$, car sinon, les points Q , P_i et P_j seraient alignés, ce qui est contraire à l'hypothèse \star_2 . Soit s_i le plus grand entier positif tel que $(b_i X_0 - a_i X_1)^{s_i}$ divise $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)$. On peut écrire alors

$$\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2) = C(X_0, X_1) \prod_{i=1}^N (b_i X_0 - a_i X_1)^{s_i}$$

où $C(X_0, X_1)$ est un polynôme homogène non nul. Reste à montrer que le polynôme $C(X_0, X_1)$ est le polynôme constant. Si ce n'est pas le cas, soit (a, b) un zéro de $C(X_0, X_1)$ différent de $(0, 0)$ (le cas $(a, b) = (0, 0)$ est à écarter car alors ou bien il existe $c \neq 0$ tel que le point de coordonnées homogènes $(0; 0; c)$ est élément de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, mais ce point est le point Q et cela contredit l'hypothèse \star_1 , ou bien seul le triplet $(0, 0, 0)$ est zéro commun à F_1 et F_2). On a alors $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)(a, b) = 0$ et nécessairement il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $F_1(a, b, c) = F_2(a, b, c) = 0$. Le point M de coordonnées homogènes $(a; b; c)$ est donc un point de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, et est donc l'un des points P_i . Ce qui implique que le polynôme $C(X_0, X_1)$ est divisible par $b_i X_0 - a_i X_1$, ce qui contredit le fait que s_i est le plus grand entier positif tel que $b_i X_0 - a_i X_1$ divise $\text{Res}_{X_2}(F_1, F_2)$. Le polynôme $C(X_0, X_1)$ n'a donc pas de zéro : c'est donc un polynôme constant non nul, égal à C .

– D'après le théorème 1.3.8, pour montrer que, pour $1 \leq i \leq N$, l'entier s_i est la multiplicité d'intersection des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 au point P_i , il suffit de vérifier pour ces entiers les propriétés 1, 2, 4, 5, et 6. de la définition 1.3.4. Pour alléger les notations, on désignera le point particulier P_i par P , l'entier s_i par s , et les coordonnées homogènes de P par $(a; b; c)$.

- La propriété 1 de la définition 1.3.4 est vérifiée par s , car un résultant est un déterminant, échanger les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 revient à échanger des colonnes de ce déterminant, ce qui le laisse invariant au signe près (et n'influe pas sur son degré).

- La propriété 2 est vérifiée immédiatement.

- La propriété 5 se déduit de la proposition 1.1.15, en remarquant que le degré d'un produit de polynômes est égal à la somme des degrés de ces polynômes.

- La propriété 6 se démontre en utilisant encore une fois les propriétés des déterminants. On remarque tout d'abord qu'on peut choisir un repère tel que le point P a pour système de coordonnées homogènes $(1; 0; 0)$. Soit alors, pour $i = 1, 2$,

$$f_i(X_1, X_2) = F_i(1, X_1, X_2),$$

et considérons $\text{Res}_{X_1}(f_1, f_2)$. C'est un polynôme en X_2 dont 0 est racine de multiplicité exactement s . On fait la même chose pour $F_1 + AF_2$ et F_2 . Le polynôme a est défini par $a(X_1, X_2) = A(1, X_1, X_2)$ et on compare $\text{Res}_{X_1}(f_1, f_2)$ avec $\text{Res}_{X_1}(f_1 + af_2, f_2)$. On notera $a(X_1, X_2) = \sum_{k=0}^p a_k(X_2)X_1^{p-k}$ avec $p = \text{degré de } a$ et $a_k = 0$ pour $k > p$.

- Si $m_1 \geq m_2 + p$, les deux résultants sont de taille $m_1 + m_2$; en ajoutant aux m_2 premières lignes de $\text{Res}_{X_1}(f_1 + af_2, f_2)$ une combinaison linéaire des m_2 dernières lignes, ne change pas la valeur du déterminant et on obtient $\text{Res}_{X_1}(f_1, f_2)$.
- Si $m_1 < m_2 + p$, alors $\text{Res}_{X_1}(f_1 + af_2, f_2)$ est de taille $2m_2 + p$; on ajoute à chacune des m_2 premières lignes une combinaison linéaire des $m_2 + p$ dernières, ce qui ne change pas la valeur du déterminant. Le calcul en développant par rapport à la première colonne donne alors exactement $\text{Res}_{X_1}(f_1, f_2)$.

- Reste à montrer la propriété 4. Soit de nouveau, pour $i = 1, 2$,

$$f_i(X_1, X_2) = F_i(1, X_1, X_2).$$

On peut alors écrire, pour $i = 1, 2$,

$$f_i(X_1, X_2) =$$

$$f_{i,0}(X_1)X_2^{m_i} + f_{i,1}(X_1)X_2^{m_i-1} + \cdots + f_{i,m_i-n_i}(X_1)X_2^{n_i} + f_{i,m_i-n_i+1}(X_1)X_1X_2^{n_i-1} + \cdots + f_{i,m_i}(X_1)X_1^{n_i}$$

où n_i désigne la multiplicité de la courbe \mathcal{C}_i au point P , et où les $f_{i,\bullet}$ sont des polynômes en X_1 , les polynômes $f_{1,k}$, pour $k \geq m_1 - n_1$, et $f_{2,\ell}$ pour $\ell \geq m_2 - n_2$ étant constants (cela se déduit du développement de Taylor de f_1 et f_2 au point P^4). On a vu que, si $\ell_{i,j}$, pour $1 \leq j \leq n_i$ sont les équations des tangentes en P (distinctes ou confondues) à la courbe \mathcal{C}_i , alors

$$\prod_{j=1}^{n_i} \ell_{i,j} = k(f_{i,m_i-n_i}X_2^{n_i} + f_{i,m_i-n_i+1}X_1X_2^{n_i-1} + \cdots + f_{i,m_i}X_1^{n_i})$$

où k est une constante non nulle. Donc, dire que les deux courbes ont des tangentes distinctes en P est équivalent à écrire que le système polynomial homogène suivant de deux équations n'a pas d'autre solution que la solution $X_1 = X_2 = 0$.

$$\begin{cases} f_{1,m_1-n_1}X_2^{n_1} + f_{1,m_1-n_1+1}X_1X_2^{n_1-1} + \cdots + f_{1,m_1}X_1^{n_1} = 0 \\ f_{2,m_2-n_2}X_2^{n_2} + f_{2,m_2-n_2+1}X_1X_2^{n_2-1} + \cdots + f_{2,m_2}X_1^{n_2} \end{cases}$$

⁴Ainsi, par exemple, $f_{1,m_1-n_1+k} = \binom{n_1}{k} \frac{\partial^{n_1} f_1}{\partial x^k \partial y^{n_1-k}}(0, 0)$

Ce qui équivaut à écrire que le déterminant D_1 ci-dessous est non nul.

$$D_1 = \begin{bmatrix} f_{1,m_1-n_1} & \cdots & \cdots & f_{1,m_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & f_{1,m_1-n_1} & \cdots & \cdots & f_{1,m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & f_{1,m_1-n_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f_{1,m_1} \\ f_{2,m_2-n_2} & \cdots & \cdots & f_{2,m_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & f_{2,m_2-n_2} & \cdots & \cdots & f_{2,m_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & f_{2,m_2-n_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f_{2,m_2} \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, dire que la droite joignant les points Q et P (dont l'équation est dans le repère considéré est $X_1 = 0$) n'est pas une tangente à la courbe \mathcal{C}_1 ou à la courbe \mathcal{C}_2 (condition \star_3) est équivalent à écrire que $f_{i,m_i-n_i} \neq 0$, pour $i = 1, 2$. Et donc dire que cette même droite ne rencontre $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ qu'au point P (condition \star_2) est équivalent à écrire que le système

$$\begin{cases} f_1(0, X_2) = 0 \\ f_2(0, X_2) = 0 \end{cases}$$

a pour unique solution $X_2 = 0$, c'est-à-dire que le système

$$\begin{cases} f_{1,0}(0)X_2^{m_1-n_1} + f_{1,1}(0)X_2^{m_1-1} + \cdots + f_{1,m_1-n_1}(0) = 0 \\ f_{2,0}(0)X_2^{m_2-n_2} + f_{2,1}(0)X_2^{m_2-1} + \cdots + f_{2,m_2-n_2}(0) = 0 \end{cases}$$

n'a pas de solution, ce qui se traduit en terme de résultant : le déterminant D_2 ci-dessous est non nul.

$$D_2 = \begin{bmatrix} f_{1,0}(0) & \cdots & \cdots & f_{1,m_1-n_1}(0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & f_{1,0}(0) & \cdots & \cdots & f_{1,m_1-n_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & f_{1,0}(0) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f_{1,m_1-n_1}(0) \\ f_{2,0}(0) & \cdots & \cdots & f_{2,m_2-n_2}(0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & f_{2,0}(0) & \cdots & \cdots & f_{2,m_2-n_2}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & f_{2,0}(0) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f_{2,m_2-n_2}(0) \end{bmatrix}$$

Revenons au calcul du résultant $\text{Res}_{X_2}(f_1, f_2)$: multiplions la $m_2 - n_2 + 1$ -ème ligne par X_1 , la $m_2 - n_2 + 2$ -ème ligne par X_1^2 , ainsi de suite jusqu'à la m_2 -ème qu'on multiplie par $X_1^{n_2}$; multiplions la $m_1 + m_2 - n_1 + 1$ -ème ligne par X_1 , $m_1 + m_2 - n_1 + 2$ -ème ligne par X_1^2 , ainsi de suite jusqu'à la $m_1 + m_2$ -ème qu'on multiplie par $X_1^{n_1}$. Après ces deux suites d'opérations, on a multiplié $\text{Res}_{X_2}(f_1, f_2)$ par $X_1^{1+2+\dots+n_1+1+2+\dots+n_2}$. Passons aux lignes : on divise la dernière colonne par $X_1^{n_1+n_2}$, l'avant dernière par $X_1^{n_1+n_2-1}$, ainsi de suite jusqu'à la $m_1 + m_2 - n_2 - n_1 + 1$ -ème colonne qu'on divise par X_1 . On a divisé donc par $X_1^{1+2+\dots+n_1+(n_1+1)+\dots+(n_1+n_2)} = X_1^{1+2+\dots+n_1+1+2+\dots+n_2+(n_1 \cdot n_2)}$. En conclusion on a

$$\text{Res}_{X_2}(f_1, f_2) = X_1^{n_1 \cdot n_2} D(X_1)$$

où $D(X_1)$ est un déterminant dont les coefficients sont des polynômes en X_1 . Un calcul de déterminant donne :

$$D(0) = D_1 D_2,$$

On en déduit que, puisque $s = \max\{\sigma \mid \text{Res}_{X_2}(f_1, f_2) = X_1^\sigma Q, Q(0) \neq 0\}$, $s \geq \nu_P(\mathcal{C}_1)\nu_P(\mathcal{C}_2) = n_1 n_2$. De plus $s = \nu_P(\mathcal{C}_1)\nu_P(\mathcal{C}_2)$ si, et seulement si, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 n'ont pas de tangente commune en P , car, puisque $D_2 \neq 0$, $D(X_1) = 0$ si, et seulement si, $D_1 = 0$ si, et seulement si, les deux courbes ont des tangentes communes en P . ■

Comme corollaire immédiat de ce théorème 1.3.19, on obtient (enfin) le théorème de Bézout ci-dessous.

Théorème 1.3.20 Théorème de Bézout. *Soit \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux courbes planes projectives complexes sans composante commune et de degrés respectifs m_1 et m_2 . Ces deux courbes ont exactement $m_1 m_2$ points d'intersection, lorsqu'on tient compte des multiplicités. Plus précisément, si $\{P_1, \dots, P_s\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, alors*

$$\sum_{i=1}^s \nu_{P_i}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = m_1 m_2.$$

Preuve. Il suffit de remarquer qu'on peut, par un changement de repère projectif, supposé que les conditions (\star_1) , (\star_2) et (\star_3) du théorème 1.3.19 sont vérifiées. Le résultat est immédiat, car la condition \star_1 implique que le degré de $\text{Res}_{X_0}(F_1, F_2)$ est exactement $m_1 m_2$, et le théorème 1.3.19 implique que ce degré est aussi

$$\sum_{i=1}^s \nu_{P_i}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2). \quad \blacksquare$$

1.3.4 Applications du théorème de Bézout

Proposition 1.3.21 *Soit \mathcal{C} une courbe algébrique projective plane de degré n d'équation F et de degré n , sans composante multiple. L'ensemble des points singuliers de \mathcal{C} est fini et si s désigne le nombre de points singuliers de \mathcal{C} , on a*

$$\sum_{i=1}^s \nu_{P_i}(\mathcal{C})(\nu_{P_i}(\mathcal{C}) - 1) \leq n(n - 1),$$

où $\{P_1, \dots, P_s\}$ est l'ensemble des points singuliers de \mathcal{C} .

Preuve. La courbe \mathcal{C} est sans composante multiple, donc, F est un polynôme sans facteur multiple. On choisit un repère dans lequel

- le point de coordonnées homogènes $(1; 0; 0)$ n'est pas un point de la courbe \mathcal{C} ;
- la droite d'équation $X_0 = 0$ n'est pas une composante de la courbe \mathcal{C} .

Dans ces conditions, remarquons tout d'abord qu'on peut supposer que $F' = \frac{\partial F}{\partial X_0}$ est un polynôme non constant homogène qui définit une courbe algébrique notée \mathcal{C}' . En effet, si F' est le polynôme nul, alors F est un polynôme homogène en (X_1, X_2) , et dans ce cas le point de coordonnées homogènes $(1; 0; 0)$ serait sur la courbe \mathcal{C} . Et, si $F' = k$ ($k \in \mathbb{C}$), alors $F = kX_0 + A(X_1, X_2)$ et dans ce cas (puisque F est homogène), le degré de F est 1, la courbe \mathcal{C} est une droite "simple" qui n'a pas de points singuliers et la formule annoncée est vraie. Les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' n'ont pas de composante commune, car F et F' n'ont pas de facteur commun. En effet, on a le lemme suivant.

Lemme 1.3.22 *Soit f et g deux polynôme en X_0 à coefficients dans $\mathbb{C}[X_1, X_2]$; si g divise f et $\frac{\partial f}{\partial X_0}$, alors g^2 divise f .*

Donc, si F et F' ont un facteur commun, soit G , alors G^2 est un facteur de F , ce qui contredit le fait que \mathcal{C} est sans composante multiple. On peut donc appliquer le théorème de Bézout aux courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' . En remarquant que d'une part, si $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, alors (par définition de la multiplicité d'une courbe en un point) $\nu_P(\mathcal{C}') \leq \nu_P(\mathcal{C}) - 1$, et d'autre part, que si P est un point singulier de \mathcal{C} , alors $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, on obtient la suite d'inégalités suivante qui permet de conclure.

$$\sum_{P \in \text{Sing}(\mathcal{C})} \nu_P(\mathcal{C})(\nu_P(\mathcal{C}) - 1) \leq \sum_{P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'} \nu_P(\mathcal{C})(\nu_P(\mathcal{C}) - 1) \leq n(n-1),$$

où $\text{Sing}(\mathcal{C})$ désigne l'ensemble des points singuliers de la courbe \mathcal{C} .

Preuve du lemme 1.3.22. Si g divise f , alors $f = hg$ et $\frac{\partial f}{\partial X_0} = \frac{\partial h}{\partial X_0}g + h\frac{\partial g}{\partial X_0}$. Or, g ne divise pas $\frac{\partial g}{\partial X_0}$, donc si g divise $\frac{\partial f}{\partial X_0}$, g divise h et g^2 divise f . ■

Ce qui termine la preuve de la proposition 1.3.21. ■

Conséquence 1.3.23 Sur une courbe algébrique plane,

1. il y a au plus $n(n-1)/2$ points doubles,
2. il y a au plus $n(n-1)/6$ points triples.

En effet,

1. Si tous les points singuliers de la courbe sont doubles, donc de multiplicité 2, on obtient

$$2s = \sum_{i=1}^s 2(2-1) \leq n(n-1).$$

2. Si tous les points singuliers de la courbe sont triples, donc de multiplicité 3, on obtient

$$6s = \sum_{i=1}^s 3(3-1) \leq n(n-1).$$

Si on regarde de nouveau ce qu'on peut dire pour deux courbes, on obtient les résultats suivants.

Conséquence 1.3.24 Soit \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux courbes planes de degré respectif m_1 et m_2

1. Si elles sont sans composante commune, alors

$$\sum_{P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2} \nu_P(\mathcal{C}_1)\nu_P(\mathcal{C}_2)$$

2. Si $\text{card}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = m_1 m_2$, alors tous les points de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ sont simples sur \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
3. Si $\text{card}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) > m_1 m_2$, alors \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont une composante commune.

Une jolie application du théorème de Bézout est le théorème de Pascal ci-dessous.

Théorème 1.3.25 *Soit \mathcal{C} une conique plane projective irréductible et soit P_i , $1 \leq i \leq 6$, 6 points distincts sur cette conique. On désigne par L_i la droite (P_i, P_{i+1}) , pour $i = 1, \dots, 5$, et par L_6 la droite (P_6, P_1) . Soit $A_1 = L_1 \cap L_4$, $A_2 = L_2 \cap L_5$ et $A_3 = L_3 \cap L_6$. Les points A_1 , A_2 et A_3 sont alignés.*

Preuve. On considère les deux cubiques $C_1 = L_1 \cup L_3 \cup L_5$ et $C_2 = L_2 \cup L_4 \cup L_6$. leur intersection contient tous les points P_i , $1 \leq i \leq 6$. Cette intersection contient également les points A_1, A_2 et A_3 . Le théorème de Bézout implique que l'intersection de C_1 avec C_2 est exactement constituée de ces 9 points. On suppose que la conique \mathcal{C} est donnée par l'équation (réduite) $f = 0$, où f est un polynôme homogène de degré 2. On suppose que $C_1 = V(g_1)$ et $C_2 = V(g_2)$.

Soit P un point de \mathcal{C} , distincts des 6 premiers points choisis ; ce point vérifie $g_1(P)g_2(P) \neq 0$, car si par exemple $g_1(P) = 0$ alors $\mathcal{C} \cap C_1 = \{P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$, ce qui donne 7 points d'intersection entre ces deux courbes, qui d'après Bézout (elles sont sans composante commune), ne peuvent se couper qu'en au plus 6 points.

Soit $g = g_1(P)g_2 - g_2(P)g_1$; g est un polynôme homogène de degré 3 tel que $V(g)$ contient l'ensemble $\{P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$. De plus, $V(g) \cap \mathcal{C} = \{P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$. Si \mathcal{C} et $V(g)$ étaient sans composante commune, leur intersection contiendrait au plus 6 points, d'après Bézout. Ceci prouve que $V(g)$ et \mathcal{C} ont une composante commune. Donc

- ou bien g n'est pas une équation réduite, l'équation réduite de $V(g)$ serait de degré au plus 2, et dans ce cas l'intersection de \mathcal{C} avec $V(g)$ comporterait au plus 4 points : ce cas est à exclure ;
- ou bien $V(g)$ et \mathcal{C} ont une composante commune avec g équation réduite, ce qui implique $g = f \times \ell$ (modulo inversible) où ℓ est une forme linéaire (pour raison de degré) et $V(g) = \mathcal{C} \cup V(\ell)$. Les points A_1 , A_2 et A_3 ne sont pas sur \mathcal{C} , ils sont donc sur $V(\ell)$ et sont alignés.

■

Chapitre 2

Théorème de Newton-Puiseux

2.1 Introduction

Tout d'abord notons que le cadre de l'étude locale des courbes planes est l'anneau local factoriel $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Remarque 2.1.1 Si on considère la courbe d'équation $y^2 - x^2(x+1) = 0$, cette courbe est définie par un polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[x, y]$. Par contre ce polynôme vu dans $\mathbb{C}\{x, y\}$ n'est pas irréductible. En effet $y^2 - x^2(x+1) = (y - x\sqrt{x+1})(y + x\sqrt{x+1}) = (y - x - x^2/2 + x^3/8 + \dots)(y + x + x^2/2 - x^3/8 + \dots)$ puisque 'on a un produit de deux fonctions holomorphes dans le disque $D(0, 1)$.

2.1.1 Le problème « à l'envers »

Supposons qu'une courbe soit "définie" par $y = x^{3/2} + x^{7/4}$; alors par élimination des radicaux on peut considérer que cette courbe est la courbe d'équation $f(x, y) = y^4 + x^6 - 2x^2y^3 - 4xy^5 - x^7 = 0$, qui est l'équation d'une courbe algébrique.

On peut aussi utiliser un paramétrage : $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6 + t^7 \end{cases}$; alors $t = \alpha\sqrt[4]{x}$ avec $\alpha^4 = 1$. En éliminant t , on trouve de nouveau que $f(x, y) = 0$ avec $f(x, y) = y^4 + x^6 - 2x^2y^3 - 4xy^5 - x^7$. En fait,

$$f(x, y) = \prod_{\alpha^4=1} (y - (\alpha\sqrt[4]{x})^6 - (\alpha\sqrt[4]{x})^7)$$

En fait le problème qu'on se pose est celui de la paramétrisation des courbes algébriques données sous la forme $f(x, y) = 0$.

2.1.2 Le théorème de Newton-Puiseux

Le but ici est de montrer le théorème suivant.

Théorème 2.1.2 Soit $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tel que $f(0, 0) = 0$ et $f(0, y)$ n'est pas identiquement nul. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, et une série $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$ vérifiant :

$$f(t^n, \varphi(t)) = 0(\star)$$

Si on note $\varphi(t) = \sum a_i t^i$, alors $y(x) = \sum a_i x^{i/n} = \varphi(x^{1/n})$ est un développement de Puiseux de la courbe C donnée par $\{f(x, y) = 0\}$.

Corollaire 2.1.3 La série $\prod_{\alpha^n=1} (y - \varphi(\alpha t))$ divise f dans $\mathbb{C}\{t\}$ et est convergente.

Remarques 2.1.4 1. Si f est irréductible, on passe d'un développement de Puiseux à un autre par l'action du groupe μ_n des racines n -ièmes de l'unité définie par, si ω est une racine primitive, $x^{1/n} \mapsto \omega x^{1/n}$.

2. Si f est réductible, alors il y a d'autres séries possibles, qui correspondent aux branches irréductibles de la courbe.

La preuve du théorème de Newton-Puiseux se fait en deux étapes : on montre tout d'abord qu'il existe une solution série formelle à l'équation (\star) . Puis on démontre que cette solution est convergente en montrant qu'il existe des solutions convergentes et que celle qu'on a construite en fait partie.

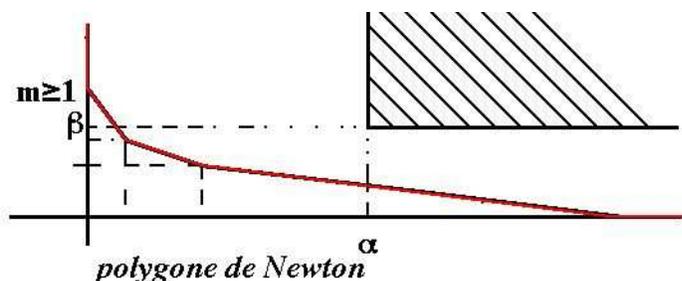
2.2 Existence d'une solution de (\star) série formelle dite de Puiseux

2.2.1 Support, Polygone de Newton

Définition 2.2.1 Le support de f , noté $\Delta(f)$, lorsque $f(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} a_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$ est défini par

$$\Delta(f) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{\alpha, \beta} \neq 0\}.$$

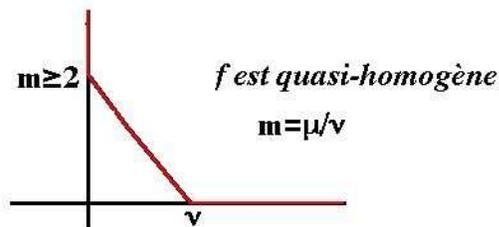
Définition 2.2.2 Le polygone de Newton de $f(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} a_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$ est l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^2 de la réunion des premiers cadrans nord-est d'origine les points de $\Delta(f)$.



Remarque 2.2.3 Soit m la valuation de $f(0, y)$; si $m = 1$, alors $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \neq (0, 0)$, il n'y a pas de singularité en 0 et le théorème 2.1.2 est exactement le théorème des fonctions implicites. On supposera donc que $m \geq 2$. Et la preuve se fait par récurrence sur m .

2.2.2 Premier pas

1. Si $f(x, y) = \sum_{\alpha + \mu\beta = \nu} x^\alpha y^\beta$ (on dit alors que f est quasi-homogène), alors $m = \nu/\mu$ et le polygone de Newton de f est un segment de droite (dont l'équation est $\alpha + \mu\beta = \nu$, et ν est l'abscisse du point de rencontre de ce côté avec l'axe horizontal..

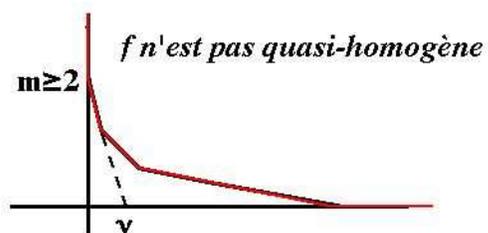


Posons $\mu = p/q$ avec p et q premiers entre eux, et

$$\begin{cases} x = t^q \\ y = ct^p \end{cases} \implies f(x, y) = \sum_{\alpha+\mu\beta=\nu} a_{\alpha,\beta} c^\beta t^{q(\alpha+\beta\mu)} = t^{q\nu} \sum_{\alpha+\mu\beta=\nu} a_{\alpha,\beta} c^\beta$$

Si $f(x, y) = y^m$, alors on a la paramétrisation $x = t, y = 0$. Sinon, Soit $c \neq 0$ vérifiant $\sum_{\alpha+\mu\beta=\nu} a_{\alpha,\beta} c^\beta$ (on fait ici un choix) et on considère la paramétrisation $x = t^q, y = ct^p$.

- Si f n'est pas quasi homogène, soit $1/\mu_0$ la pente la plus forte en valeur absolue donnée par les côtés du polygone de Newton : c'est le côté du polygone passant par le point $(0, m)$ qui la fournit, côté porté par la droite d'équation $\alpha + \mu_0\beta = \nu_0$, et ν_0 est l'abscisse du point de rencontre de cette droite avec l'axe horizontal.



Soit $f_0 = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\nu_0} a_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$. On détermine c_0 (plusieurs choix possibles) tel que $f_0(x, y) = 0$ avec

$$\begin{cases} x = t^{q_0} \\ y = c_0 t^{p_0} \end{cases} \text{ et } \mu_0 = p_0/q_0 \text{ avec } p_0 \text{ et } q_0 \text{ premiers entre eux.}$$

On pose alors $\begin{cases} x = x_1^{q_0} \\ y = x_1^{p_0} (c_0 + y_1) \end{cases}$ On a alors

$$f(x, y) = x_1^{\nu_0 q_0} f_1(x_1, y_1) (= x^{\nu_0} f_1(x_1, y_1))$$

et on itère le procédé avec f_1

En fait, on cherche $c_i, p_i/q_i$ tel que $y_{i+1} = c_i x_{i+1}^{p_i/q_i}$ absorbe tous les monômes de f_i situés sur le côté le plus pentu du polygone de Newton de f_i .

On construit ainsi une suite de « solutions approchées »

$$\begin{aligned} y &= x^{p_0/q_0} (c_0 + y_1) \\ y_1 &= x^{p_1/q_1} (c_1 + y_2) \\ y_2 &= x^{p_2/q_2} (c_2 + y_3) \\ &\dots \end{aligned}$$

D'où

$$y = x^{p_0/q_0} (c_0 + x_1^{p_1/q_1} (c_1 + x_2^{p_2/q_2} (c_2 + \dots)))$$

Posons $\mu_i = p_i/q_i$; on obtient alors

$$y = c_0 x^{\mu_0} + c_1 x^{\mu_0 + \mu_1/q_0} + c_2 x^{\mu_0 + \mu_1/q_0 + \mu_2/(q_0 q_1)} + \dots$$

De plus $m_{i+1} \leq m_i$: la suite des m_i est donc stationnaire.

Ainsi, on définit une série si la suite des dénominateurs ne croit pas indéfiniment. Dans certains cas (voir les deux exemples ci-dessous) le processus s'arrête, avec $y_{i+1} = 0$ (en fait c'est que le polygone de Newton de f_i est réduit à un point). On a la proposition suivante.

Proposition 2.2.4 *Il existe un indice i_0 tel que μ_{i_0} est un entier.*

Conséquence 2.2.5 Dans ce cas, y est représenté par un série en $x^{1/n}$, avec $n = q_0 q_1 \dots q_{i_0}$.

Preuve de la proposition. Il suffit de montrer : $\mu_i \notin \mathbb{N} \Rightarrow m_i > m_{i+1}$, ou, de manière équivalente, $m_i = m_{i+1} \Rightarrow \mu_i \in \mathbb{N}$.

Pour simplifier les notations, on fait la preuve avec $i = 0$. On a donc $x = x_1^{q_0}$ et $y = x_1^{p_0} (c_0 + y_1)$. En substituant dans f on obtient :

$$x^{\nu_0 q_0} f_1(x_1, y_1) = x_1^{\nu_0 q_0} \left(\sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \nu_0} a_{\alpha, \beta} (c_0 + y_1)^\beta + x_1(\dots) \right)$$

Mais, $\nu_0 = \mu_0 m$ d'où

$$f_1(0, y_1) = \left(\sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \mu_0 m} a_{\alpha, \beta} (c_0 + y_1)^\beta \right) = g(c_0 + y_1)$$

où c_0 est une solution non nulle de l'équation $g(t) = 0$. Or le polynôme g est de degré exactement m_0 (car la droite d'équation $\alpha + \mu_0 \beta = \nu_0$ rencontre l'axe horizontal au point d'abscisse $\nu_0 = \mu_0 m$). Pour calculer m_1 , il faut trouver la multiplicité du zéro $y_1 = 0$ du polynôme $f_1(0, Y_1)$, c'est donc la multiplicité de c_0 comme zéro de g .

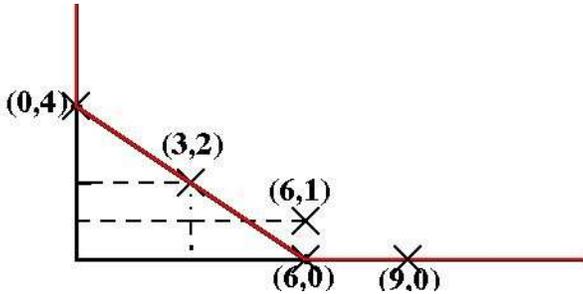
Si $m_0 = m_1$, c'est que $g(t) = \text{cte}(t - t_0)^m$. Le coefficient de t^{m-1} dans $g(t) = \sum_{\alpha + \mu_0 \beta = \mu_0 m} a_{\alpha, \beta} t^\beta$ n'est donc pas

nul et $a_{\alpha, m-1} \neq 0$ avec $\alpha + \beta \mu_0 (m-1) = \mu_0 m$. On a ici donc $\alpha = \mu_0$ ce qui implique que μ_0 est un entier puisque α l'est. ■

2.2.3 Quelques exemples

$$f(x, y) = y^4 + x^6 - 2x^3 y^2 - 4y x^6 - x^9.$$

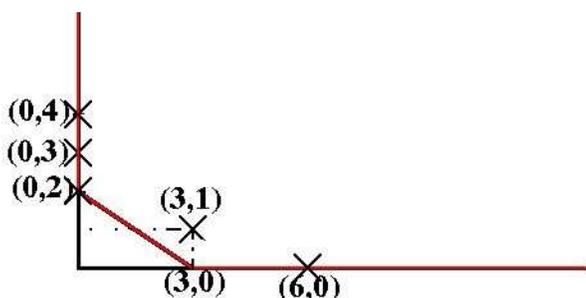
Polygone de Newton de f :



On a $\mu_0 = 3/2 = p_0/q_0$; $\alpha + \mu_0\beta = 6$, d'où $c_0^4 - 2c_0^2 + 1 = (c_0^2 - 1)^2 = 0$. Ici, on fait un choix car $c_0 = \pm 1$. Soit $c_0 = 1$, et $x = x_1^2, y = x_1^3(1 + y_1)$.

$$f_1(x_1, y_1) = 4y_1^2 + 4y_1^3 + y_1^4 - 4x_1^3 - 4x_1^3y_1 - x_1^6.$$

Polygone de Newton de f_1 :



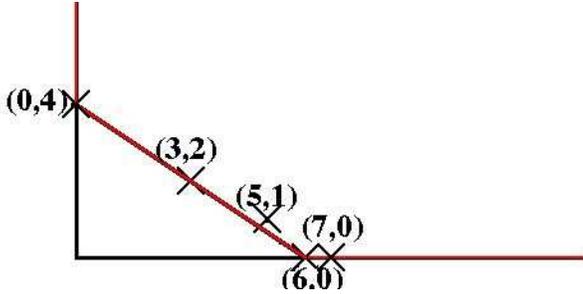
On a $\mu_1 = 3/2 = p_1/q_1$; $\alpha + \mu_1\beta = 3$, d'où $4(c_1^2 - 1) = 0$. Ici, on fait un choix car $c_1 = \pm 1$. Soit $c_1 = 1$, et $y = x^{3/2} + x^{9/4}$. En substituant dans f_1 la variable x_1 par t^2 , la variable y_1 par t^3 , on voit qu'on a obtenu une paramétrisation de f_1 et donc que cette approximation est correcte; d'où les quatre développements de Puiseux.

$$\begin{aligned} y &= x^{3/2} + x^{9/4} \\ y &= x^{3/2} - x^{9/4} \\ y &= -x^{3/2} + x^{9/4} \\ y &= -x^{3/2} - x^{9/4} \end{aligned}$$

On peut ici prendre pour une paramétrisation $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6 + t^9 \end{cases}$

$$f(x, y) = y^4 - 2y^2x^3 + x^6 - 4yx^5 - x^7.$$

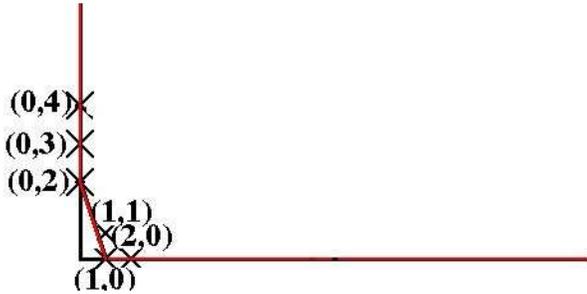
Polygone de Newton de f :



On a $\mu_0 = 3/2 = p_0/q_0$; $\alpha + \mu_0\beta = 6$, d'où $c_0^4 - 2c_0^2 + 1 = (c_0^2 - 1)^2 = 0$. Ici, on fait un choix car $c_0 = \pm 1$. Soit $c_0 = 1$, et $x = x_1^2, y = x_1^3(1 + y_1)$.

$$f_1(x_1, y_1) = 4y_1^2 + 4y_1^3 + y_1^4 - 4x_1 - 4x_1y_1 - x_1^2.$$

Polygone de Newton de f_1 :



On a $\mu_1 = 1/2 = p_1/q_1$; $\alpha + \mu_1\beta = 1$, d'où $4(c_1^2 - 1) = 0$. Ici, on fait un choix car $c_0 = \pm 1$. Soit $c_0 = 1$, et $y = x^{3/2} + x^{7/4}$. En substituant dans f , on voit que cette approximation est correcte; d'où les quatre développements de Puiseux.

$$\begin{aligned} y &= x^{3/2} + x^{7/4} \\ y &= x^{3/2} - x^{7/4} \\ y &= -x^{3/2} + x^{7/4} \\ y &= -x^{3/2} - x^{7/4} \end{aligned}$$

On peut ici prendre pour une paramétrisation $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6 + t^7 \end{cases}$

2.3 Existence d'une solution de (\star) série convergente

Cette existence est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.3.1 Soit $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, irréductible tel que $f(0, y)$ n'est pas identiquement nul, et soit $m = \text{val}(f(0, y))$; il existe $\varepsilon_0 > 0$ vérifiant $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \exists \delta > 0$ et $\exists y(z)$ série convergente $\in \mathbb{C}\{z\}$ tels que

$$\begin{aligned} \pi : B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta^{1/m}\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ z &\longmapsto \pi(z) = (z^m y(z)) \end{aligned} \text{ est holomorphe surjective.}$$

De plus $\pi^{-1}(0) = \{0\}$ et si $X = \{(x, y) \mid |y| < \varepsilon, |x| < \delta, f(x, y) = 0\}$ le morphisme $\pi|_{B \setminus \{0\}} : B \setminus \{0\} \rightarrow X \setminus \{O\}$ est biholomorphe.

Preuve. Le théorème de préparation de Weierstrass permet de supposer que $f(x, y) = y^m + c_1(x)y^{m-1} + \dots + c_m(x)$. On admet le lemme suivant.

Lemme 2.3.2 *Pour ε assez petit, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|x_0| < \delta$, le polynôme $f(x_0, y)$ a exactement m zéros dans $\{(x, y), |x| < \delta, |y| < \varepsilon\}$*

Puisque f est irréductible, f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}\{x\}[y]$, ce qui implique (résultat admis ici), que c'est aussi le cas dans $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Conséquence : $\{f = 0\} \cap \{\frac{\partial f}{\partial y} = 0\}$ est formé de points isolés (c'est le théorème de Bézout, lorsqu'on travaille dans un cadre algébrique, on admet ce résultat dans le cas analytique).

Si δ est assez petit et si $0 < |x_0| < \delta$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne s'annule pas sur $\{y, f(x_0, y) = 0\}$ et $f(x_0, y)$ a m zéros simples. Soit y_0 l'un de ces zéros ; le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'une fonction holomorphe $\tilde{y}(x)$ et un voisinage de x_0 dans lequel cette fonction donne une paramétrisation de X . Ce qui prouve que X est une variété lisse au voisinage de (x_0, y_0) , et $(x, y) \mapsto x$ est biholomorphe dans ce voisinage.

Donc, si D_δ est le disque centré en 0 de rayon δ , on a un revêtement $X \setminus \{0\} \rightarrow D_\delta \setminus \{0\}$; ce revêtement est le revêtement d'un disque épointé par un connexe. Donc, si on choisit $z_0 \in B \setminus \{0\}$ tel que $z_0^m = x_0$, ou encore $z_0 \in B \setminus \{0\}$ tel que $f(z_0^m, y_0) = 0$, il existe un unique homéomorphisme $\pi : B \setminus \{0\} \rightarrow X \setminus \{0\}$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} X \setminus \{0\} & \xleftarrow{\pi} & B \setminus \{0\} \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & D_\delta \setminus \{0\} & \end{array}$$

où p_1 est définie par $p_1((x, y)) = x$ et p_2 par $p_2(z) = z^m$. On a $\pi(z) = (z^m, \tilde{y}(z^m))$ où \tilde{y} est holomorphe. De plus π est biholomorphe car $\pi^{-1}((x, y)) = \sqrt[m]{x}$ pour une branche bien choisie de $\sqrt[m]{x}$. Les racines d'un polynôme sont des fonctions continues en les coefficients du polynôme, donc quand z tend vers 0, $y(z)$ tend également vers 0. On obtient donc une fonction continue $y(z)$ par prolongement, qui est holomorphe sur $B \setminus \{0\}$, donc holomorphe sur B . D'où la paramétrisation de $X : \pi(z) = (z^m, y(z))$ ■

2.4 Fin de la preuve du théorème de Newton-Puiseux

2.4.1 f est irréductible

Soit $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, présentée sous forme "Weierstrass", dans $\mathbb{C}\{x\}[y]$. Si f est irréductible, le théorème 2.3.1 donne une solution série convergente à l'équation $f(x, y) = 0$, soit $y(x^{1/m})$. On a donc m solutions séries convergentes à cette équation exactement, qui sont $y(x^{1/m}), y(\omega x^{1/m}), \dots, y(\omega^{m-1} x^{1/m})$, où $\omega = \exp(2i\pi/m)$. La série formelle trouvée plus haut induit l'existence de m solutions séries formelles à l'équation $f(x, y) = 0$. Il ne peut y en avoir plus donc ce sont les séries convergentes qu'on vient de trouver.

Les séries de Puiseux sont donc convergentes.

2.4.2 f n'est pas irréductible

Si f n'est pas irréductible, une série de Puiseux de f est en fait une série de Puiseux de l'une des branches de la courbe. Donc elle est convergente.

On voit ici que dans ce cas il y a des choix de deux natures : on choisit une branche f_i de f d'une part, et d'autre part on choisit une racine m_i -ième de l'unité, où $m_i = \text{val}(f_i(0, y))$.

2.4.3 Retrouver f à partir d'une série de Puiseux

On a le théorème suivant.

Théorème 2.4.1 Soit m un entier et $y(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ une série convergente ; l'image X de $z \mapsto (z^m, y(z))$ est le lieu des zéros de la fonction holomorphe $f(x, y) = \prod_{\omega^m=1} (y - y(\omega x^{1/m}))$ dans un voisinage de $O \in \mathbb{C}^2$.

Preuve. Pour $x \neq 0$ il est clair que f est holomorphe. On prolonge f par continuité en O ce qui donne une fonction holomorphe y compris en O . ■

2.5 Résolution des singularités de courbe plane

Remarque 2.5.1 Le morphisme $\pi : B \rightarrow X$ est un paramétrage d'une composante irréductible de X , qui peut être singulière, par un espace lisse. Ce qui entre dans le cadre de la résolution de singularités de courbe.

Définition 2.5.2 Une résolution des singularités de X est un morphisme propre surjectif holomorphe $\tilde{X} \rightarrow X$ de source \tilde{X} lisse et tel que

$$\pi : \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing} X) \rightarrow X \setminus \text{Sing} X$$

est biholomorphe et $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing} X)$ est dense dans \tilde{X} .

Ici donc, en reprenant les notations ci-dessus, on voit que si f est irréductible, $B \rightarrow X$ est un résolution des singularités de X (et B est un disque qui ne dépend pas de f). Si f n'est pas irréductible, en travaillant branche par branche, on obtient une résolution des singularités de X avec $\prod_{i=1}^r B_i \rightarrow X$.

2.6 Développement de Puiseux d'une courbe réductible

2.6.1 Les paires caractéristiques

On considère une série de Puiseux $y = \sum_{k \in \mathbb{Q}, k \geq 1} a_k x^k$, qu'on écrit sous la forme

$$y = a_{\frac{m_1}{n_1}} x^{\frac{m_1}{n_1}} + \dots + a_{k_1} x^{k_1} + \dots + a_{\frac{m_2}{n_1 n_2}} x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + \dots + a_{k_2} x^{k_2} + \dots + a_{\frac{m_g}{n_1 \dots n_g}} x^{\frac{m_g}{n_1 \dots n_g}} + \dots + a_{k_g} x^{k_g} + \dots$$

où $(m_i, n_i) = 1$ ($m_i \geq n_i$) et

$$k_1 \in \frac{1}{n_1}, \frac{m_1}{n_1} \leq k_1 < \frac{m_2}{n_1 n_2},$$

$$k_2 \in \frac{1}{n_1 n_2}, \frac{m_2}{n_1 n_2} \leq k_2 < \frac{m_3}{n_1 n_2 n_3}, \text{ etc.}$$

$$k_g \in \frac{1}{n_1 \dots n_g}, \frac{m_g}{n_1 \dots n_g} \leq k_g.$$

Rappelons que la suite des dénominateurs ne croit pas indéfiniment (voir proposition 2.2.4).

On pose $k_j = \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}$.

Définition 2.6.1 La partie caractéristique du développement de Puiseux est

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^g a_{k_j} x^{k_j} = x^{\frac{p_1}{q_1}} \left(a_{k_1} + x^{\frac{p_2}{q_1 q_2}} \left(a_{k_2} + \dots + a_{k_g} x^{\frac{p_g}{q_1 \dots q_g}} \right) \right)$$

avec $(p_i, q_i) = 1$.

Les paires de Puiseux sont les fractions $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_g}{n_g}$.

Les paires de Zariski sont les fractions $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_g}{q_g}$.

Les paires de Puiseux et les paires de Zariski sont les paires caractéristiques.

Remarque 2.6.2 On a les relations suivantes :

$p_1/q_1 = m_1/n_1, p_1/q_1 + p_2/q_1q_2 = m_2/n_1n_2$ etc. (et $p_1 = m_1, q_1 = n_1$)

2.6.2 Les exposants de coïncidence

Si f est réductible, alors on obtient un ensemble de développement de Puiseux pour chaque branche. On définit alors les exposants de coïncidence entre les développements de Puiseux de chacune des branches.

Soient φ et ψ deux développements de Puiseux pour deux branches distinctes de la courbe (réductible). Soient n et n' les dénominateurs les plus grands respectifs pour chacun de ces développements.

Définition 2.6.3 L'exposant de coïncidence entre ces deux branches, noté $c(\varphi, \psi)$, est

$$c(\varphi, \psi) = \max\{\text{val}_x(\varphi(\varepsilon x) - \psi(\eta x)), \varepsilon^n = 1, \eta^{n'} = 1\}$$

Exemples 2.6.4

1. Supposons que les parties caractéristiques de deux branches sont données par $\varphi(x) = x^{41/13}$ et $\psi(x) = x^{42/13}$, alors ces seuls exposants de coïncidence possibles sont : 1, 2, 3, 41/13.
2. Supposons que les parties caractéristiques de deux branches sont données par $\varphi(x) = x^{7/3}$ et $\psi(x) = x^{21/5}$, alors ces seuls exposants de coïncidence possibles sont : 1, 2, 7/3.

Remarque 2.6.5 De manière générale, si on connaît les parties caractéristiques de deux développements de Puiseux de deux courbes distinctes, le nombre d'exposants de coïncidence possibles entre ces deux courbes est fini, sauf si les deux parties caractéristiques sont égales.

Chapitre 3

Résolution des singularités par éclatement

3.1 Introduction

Remarque 3.1.1 Le théorème de Newton-Puiseux donne pour un germe C de courbe plane à r branches une application propre surjective holomorphe $\Pi : \prod_{j=1}^n B_j \rightarrow C$ telle que la restriction de Π à $\prod_{j=1}^n (B_j \setminus \{0\})$ et à valeur dans C est biholomorphe (les B_j sont des disques). Cela ne permet pas de comprendre la disposition relative des différentes branches. On va dans la suite désingulariser la courbe C en éclatant $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en la singularité de C . Le but du chapitre est de montrer le théorème suivant.

Théorème 3.1.2 Soit $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et C une courbe algébrique de X ; il existe une variété algébrique \tilde{X} sur \mathbb{C} et un morphisme $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ tels que

1. \tilde{X} est lisse ;
2. le morphisme π est propre (ie l'image réciproque d'un compact par π est un compact)
3. le morphisme π est un isomorphisme (=biholomorphe) de $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}C)$ sur $X \setminus \text{Sing}C$;
4. $\pi^{-1}(C)$ est un diviseur à croisements normaux.

où une variété algébrique sur \mathbb{C} est une sous-variété d'un espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ défini par des équations algébriques, et un diviseur à croisements normaux (DCN) est localement de la forme $\{(x_1, x_2) \mid x_1^{e_1} x_2^{e_2} = 0\}$ ou $\{(x_1, x_2) \mid x_1^{e_1} = 0\}$

Ce théorème peut se résumer dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi^{-1}(C \setminus \text{Sing}C) & \rightarrow & \pi^{-1}(C) & \xrightarrow{\text{DCN}} & \tilde{X} & \leftrightarrow & \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}C) & \leftrightarrow & \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(C) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 C \setminus \text{Sing}C & \rightarrow & C & \hookrightarrow & X & \leftrightarrow & X \setminus \text{Sing}C & \leftrightarrow & X \setminus C
 \end{array}$$

La transformée totale de C est $\pi^{-1}(C)$. Notons \tilde{C} l'adhérence de $\pi^{-1}(C \setminus \text{Sing}C)$; c'est la transformée stricte de C . C'est une courbe lisse et c'est ce qu'on appelle une désingularisation de la courbe C . L'adhérence de $\pi^{-1}(C) \setminus \tilde{C}$ est le diviseur exceptionnel.

On associe à cette désingularisation le graphe dual du diviseur exceptionnel : chaque sommet représente une composante du diviseur exceptionnel (c'est à dire un \mathbb{P}^1) et est pondéré par l'exposant e de l'équation locale $x^e = 0$ de ce \mathbb{P}^1 , et indexé par son numéro d'apparition $\#1, \#2, \dots$ au cours des éclatements successifs. De plus on représente par une flèche chaque composante de la transformée stricte de C . Entre deux sommets, on a une arête lorsque les deux composantes correspondantes se coupent. Ce graphe dual du diviseur exceptionnel est l'arbre de désingularisation de la singularité à l'origine.

Remarques 3.1.3 1. Le théorème est vrai aussi si on prend $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et pour C une hypersurface (définie par une équation), avec la généralisation de la notion de DCN à ce cas. La démonstration est par contre très longue

2. Ce théorème est un théorème local, c'est pourquoi dans la suite on revient à la situation où C est un germe de courbe passant par O , et X est un petit ouvert de \mathbb{C}^2 ou \mathbb{C}^2 lui-même.
3. Localement, la courbe C est définie par $C = \{f = 0\}$, où f est un polynôme en deux variables sans facteurs carrés : en effet, si f contient des facteurs carrés la singularité n'est plus isolée.
4. Soit $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et C une courbe algébrique de X ; si \tilde{X} est une variété algébrique sur \mathbb{C} et si on a un morphisme $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ vérifiant les propriétés 1,2 et 3 du théorème 3.1.2, alors on appelle aussi "transformée stricte de C " l'adhérence \tilde{C} de $\pi^{-1}(C \setminus \text{Sing}C)$ (qui n'est alors pas nécessairement lisse) et l'adhérence de $\pi^{-1}(C) \setminus \tilde{C}$ est aussi appelée le *diviseur exceptionnel* de π .

3.2 Éclatement de $O \in \mathbb{C}^2$

Les coordonnées dans \mathbb{C}^2 sont notées (x_0, x_1) ; dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, les coordonnées homogènes sont notées $(z_0 : z_1)$. Rappelons qu'on peut voir $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme l'ensemble des directions de droites de \mathbb{C} , donc comme l'ensemble des droites passant par O . Soit $H = \{(x_0, x_1), (z_0 : z_1) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x_0 z_1 = x_1 z_0\}$; cet ensemble H est l'éclaté de O dans \mathbb{C}^2 . On voit qu'un couple $((x_0, x_1), (z_0 : z_1)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est dans H lorsque le point (x_0, x_1) est sur la droite définie par $(z_0 : z_1)$.

On deux projections de H , l'une, π_1 , sur \mathbb{C}^2 , l'autre, π_2 , sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et on a les faits suivants :

- 1 $\pi_1 : H \setminus \pi_1^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ est un isomorphisme (bijection bihomomorphe);
- 2 $\pi_1 : H \rightarrow \mathbb{C}^2$ est surjectif;
- 3 $\pi_1^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^1$ (donc, π_1 est propre);
- 4 $\pi_2 : H \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un fibré en droites;
- 5 H est une surface complexe lisse recouverte par deux cartes décrites ci-dessous.

Sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on a deux cartes $U_0 = \{(z_0 : z_1) \mid z_0 \neq 0\}$ et $U_1 = \{(z_0 : z_1) \mid z_1 \neq 0\}$; les deux cartes de H sont données par $\pi_2^{-1}(U_0)$ et $\pi_2^{-1}(U_1)$. Sur $\pi_2^{-1}(U_0)$ on prend pour coordonnées (u_0, v_0) , avec $v_0 = x_0$; Sur $\pi_2^{-1}(U_1)$ on prend pour coordonnées (u_1, v_1) , avec $v_1 = x_1$. Le changement de cartes, donc lorsque $u_0 u_1 \neq 0$, est donné par

$$\begin{cases} u_1 = u_0^{-1} \\ v_1 = (x_1 = x_0 u_0) = u_0 v_0 \end{cases}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \pi_2^{-1}(U_0) &= \{(v_0, u_0 v_0); (1 : u_0)\} \simeq \{(u_0, v_0) \mid u_0 \in \mathbb{C}, v_0 \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^2 \\ \pi_2^{-1}(U_1) &= \{(u_1 v_1, v_1); (u_1 : 1)\} \simeq \{(u_1, v_1) \mid u_1 \in \mathbb{C}, v_1 \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

D'où les écritures de la projections π_1 de H sur \mathbb{C}^2 :

1. dans la carte $\pi_2^{-1}(U_0) : (u_0, v_0) \mapsto (v_0, u_0 v_0)$;
2. dans la carte $\pi_2^{-1}(U_1) : (u_1, v_1) \mapsto (u_1 v_1, v_1)$.

3.3 Généralisation

L'éclatement d'un point étant fait localement, on généralise ce procédé pour éclater un point arbitraire p dans une variété complexe M de dimension 2. On prend une carte locale centrée en p , soit V . D'où le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & M \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{V} & \hookrightarrow & M \end{array}$$

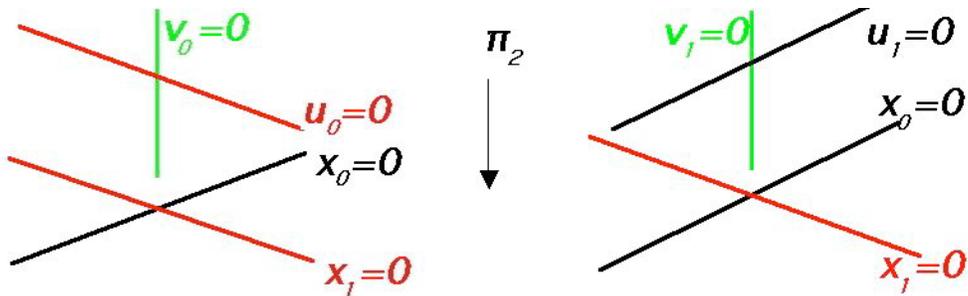
où $\tilde{M} = M \setminus \{p\} \cup \tilde{V}$ en recollant le long de $V \setminus \{p\}$. On montre le théorème 3.1.2 en construisant le morphisme π cherché comme composé d'éclatements de points, ceci à l'aide des développements de Puiseux. En plus grande dimension, on a le même procédé d'éclatement mais on doit éclater des variétés lisses de dimension $0, 1, \dots, \dim X - 2$. La difficulté est de s'assurer qu'il suffit d'un nombre fini d'éclatements pour obtenir π .

3.4 Exemples

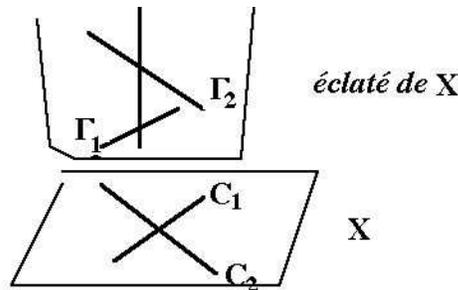
3.4.1 Exemple 1

Soit $C = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x_0, x_1) = x_0 x_1\}$ qui admet une singularité (isolée) en O

$$\begin{array}{l|l} \text{carte } U_0 \text{ (à gauche) : } \begin{cases} x_0 = v_0 \\ x_1 = u_0 v_0 \end{cases} & \text{carte } U_1 \text{ (à droite) : } \begin{cases} x_0 = u_1 v_1 \\ x_1 = v_1 \end{cases} \\ \text{nouvelle équation : } u_0 v_0^2 = 0 & \text{nouvelle équation : } u_1 v_1^2 = 0 \end{array}$$



En recollant les deux cartes on obtient \tilde{X} :



Et on peut construire facilement l'arbre de désingularisation :

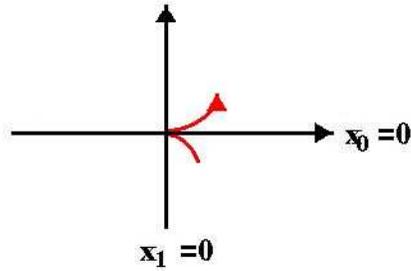


ou

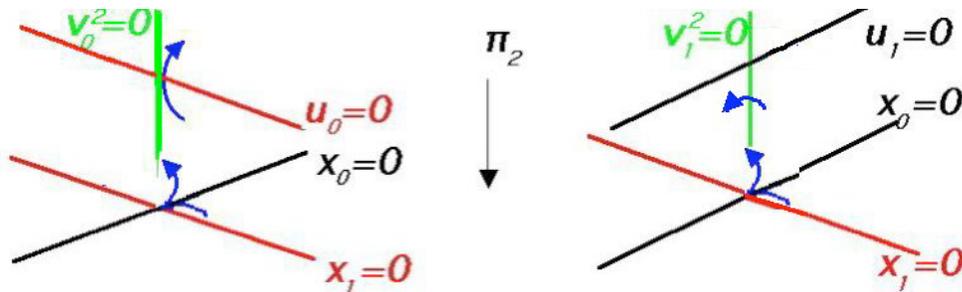


3.4.2 Exemple 2

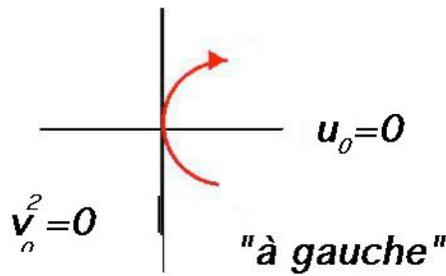
Soit $C = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x_0, x_1) = x_0^3 - x_1^2\}$ qui admet une singularité (isolée) en O



Étape 1. carte U_0 (à gauche) : $\begin{cases} x_0 = v_0 \\ x_1 = u_0 v_0 \end{cases}$ | nouvelle équation : $v_0^2(v_0 - u_0^2) = 0$ carte U_1 (à droite) : $\begin{cases} x_0 = u_1 v_1 \\ x_1 = v_1 \end{cases}$ | nouvelle équation : $v_1^2(u_1^3 v_1 - 1) = 0$



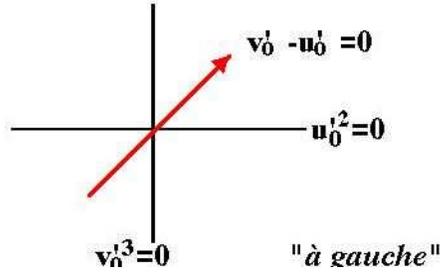
Après regroupement des deux cartes :



On voit que dans la carte $\pi_2^{-1}(U_1)$, il n'y a plus de singularité, et que la droite (double) $\{v_1^2 = 0\}$ et transverse avec la branche d'équation $(u_1^3 v_1 - 1) = 0$, donc, on ne regarde plus que ce qui se passe dans l'autre carte, où on continue à éclater car les deux branches ne sont pas transverses.

Étape 2.

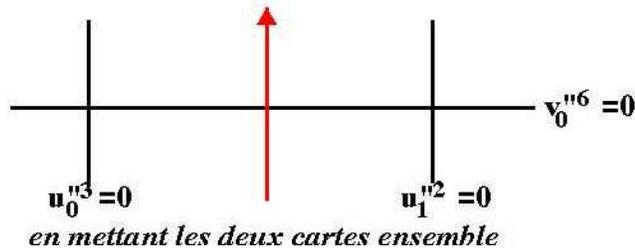
première carte (à gauche) : $\begin{cases} u_0 = v'_0 \\ v_0 = u'_0 v'_0 \end{cases}$ nouvelle équation : $v_0'^3 (u'_0 - v'_0) = 0$	deuxième carte (à droite) : $\begin{cases} u_0 = u'_1 v'_1 \\ v_0 = v'_1 \end{cases}$ nouvelle équation : $(1 - u_1'^2 v_1') v_1'^3 = 0$
---	---



Ici tout est lisse, mais dans la première carte il n'y a pas vraiment croisements normaux puisque les trois branches se coupent en un même point. Dans la deuxième, par contre on a terminé.

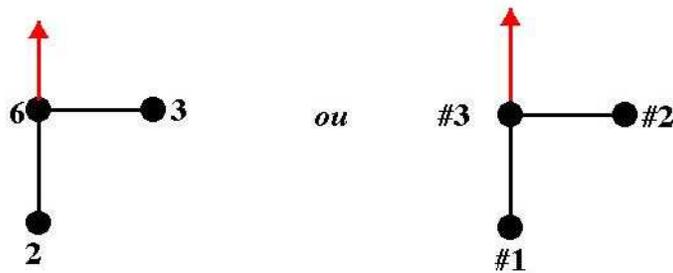
Étape 3.

première carte (à gauche) : $\begin{cases} u'_0 = v''_0 \\ v'_0 = u''_0 v''_0 \end{cases}$ nouvelle équation : $v_0''^6 u_0''^3 (u_0'' - 1) = 0$	deuxième carte (à droite) : $\begin{cases} u'_0 = u''_1 v''_1 \\ v'_0 = v''_1 \end{cases}$ nouvelle équation : $u_1''^2 v_1''^6 (1 - u_1'') = 0$
---	---



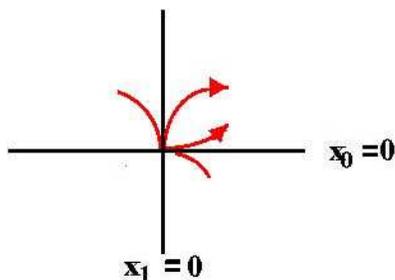
Maintenant tout est terminé.

Ce qui donne le graphe dual



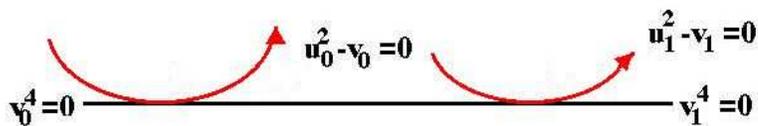
3.4.3 Exemple 3

Soit $C = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x_0, x_1) = (x_0^2 - x_1^3)(x_0^3 - x_1^2)\}$ qui admet une singularité (isolée) en O



Étape 1.

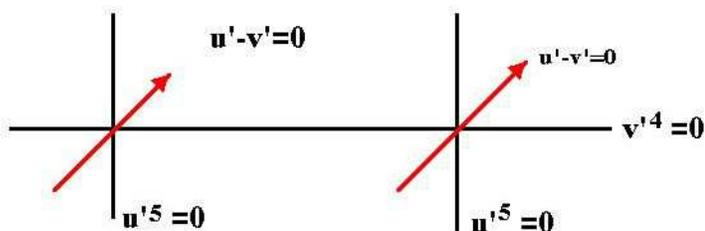
carte U_0 (à gauche) : $\begin{cases} x_0 = v_0 \\ x_1 = u_0 v_0 \end{cases}$ nouvelle équation : $v_0^4(1 - u_0^3 v_0)(v_0 - u_0^2) = 0$	carte U_1 (à droite) : $\begin{cases} x_0 = u_1 v_1 \\ x_1 = v_1 \end{cases}$ nouvelle équation : $v_1^4((u_1^2 - v_1)(u_1^3 v_1 - 1)) = 0$
--	--



en mettant les deux cartes ensemble

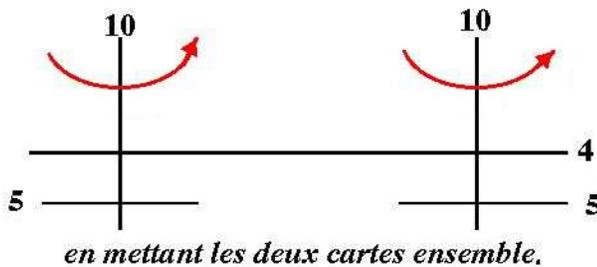
Les deux branches sont séparées par le premier éclatement.

Étape 2. Ensuite, on éclate dans chacune des deux cartes en faisant $u_0 = v'$, $v_0 = u'v'$ (éclatement de U_0 à l'origine, et on ignore l'autre carte car tout est résolu) et $u_1 = v'$, $v_1 = u'v'$ (éclatement de U_1) et la transformée stricte a pour équation : $v^4(u^2 - v) \times \text{un inversible} = u'^5 v'^4 (u' - v') = 0$.



en mettant les deux cartes ensemble

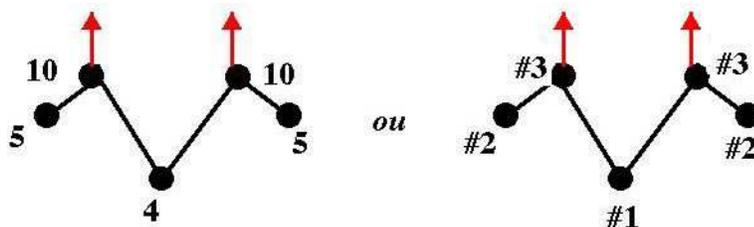
Étape 3. Ensuite dans les deux cartes on trouve : $u'^5 v'^4 (u' - v') = v''^{10} u''^4 (1 - u'')$.



(On indique seulement les multiplicités des composantes du diviseur exceptionnel)

Maintenant tout est terminé.

Ce qui donne le graphe dual



3.5 Un cas particulier : $f(x_0, x_1) = x_0^p - x_1^q$

Dans un premier temps, nous allons construire l'arbre de désingularisation du germe en O de la singularité donnée par $f(x_0, x_1) = x_0^p - x_1^q$, non pondéré, c'est-à-dire sans préciser les multiplicités des composantes du diviseur exceptionnel. Pour cela on a besoin de résultats sur le développement en fraction continue du rationnel p/q .

Remarque 3.5.1 On supposera que p et q sont premiers entre eux, car si ce n'est pas le cas, et si d est le pgcd de p et q , alors l'équation du germe de courbe en O devient $x^{p'd} - y^{q'd} = 0$, et le germe n'est plus irréductible. Et c'est ce cas qu'on veut regarder.

3.5.1 Sur le développement des rationnels en fraction continue

Proposition 3.5.2 Soit $p/q \in \mathbb{Q}^+$; alors on peut écrire p/q sous la forme suivante :

$$\frac{p}{q} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_{s+1}}}}$$

avec $q_1 \geq 0, q_i \geq 1, q_s \geq 2$. On appelle ℓ la suite des q_i . C'est le développement en fraction continue de p/q

Remarque 3.5.3 Si p et q sont premiers entre eux, on a :

$$\begin{aligned} p &= q_1 q + r_1 \\ q &= q_2 r_1 + r_2 \\ &\dots \\ r_{s-2} &= q_s r_{s-1} + 1 \end{aligned}$$

et dans ce cas, $q_{s+1} = r_{s-1}$.

Définition 3.5.4 L'approximation lente de p/q est la suite formée des ℓ nombres rationnels suivants ;

$$1, 2, 3, \dots, q_1, q_1 + 1, q_1 + \frac{1}{2}, q_1 + \frac{1}{3}, \dots, q_1 + \frac{1}{q_2}, q_1 + \frac{1}{q_2 + 1}, q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{2}}, \dots, q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}, \dots$$

Exemples 3.5.5 - $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ et l'approximation lente de $\frac{3}{2}$ est la suite $1, 2, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

- $\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$ et l'approximation lente de $\frac{7}{5}$ est la suite

$$1, 2, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 1 + 1 + \frac{1}{2 + 1} = \frac{4}{3}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

3.5.2 L'arbre de désingularisation de $x^p - y^q$ en O

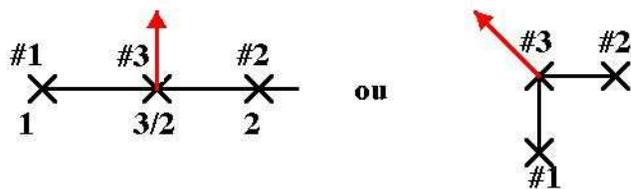
On suppose que $p > q$ et on considère le développement en fraction continue de p/q , avec les notations ci-dessus. Posons

$$\begin{aligned} a_k &= k, & 1 \leq k \leq q_1 \\ a_k &= q_1 + \frac{1}{k - q_1}, & q_1 + 1 \leq k \leq q_1 + q_2 \\ a_k &= q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{k - (q_1 + q_2)}}, & q_1 + q_2 + 1 \leq k \leq q_1 + q_2 + q_3 \\ &\text{etc} \dots \end{aligned}$$

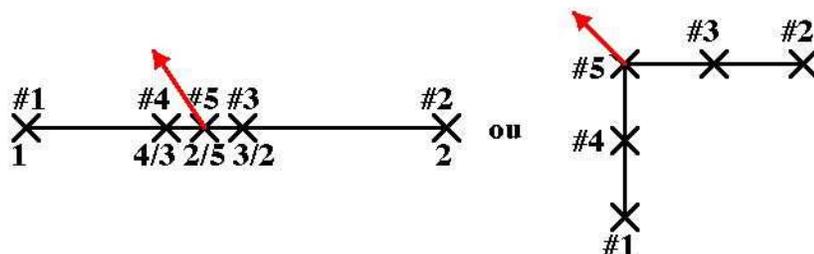
Proposition 3.5.6 L'arbre de désingularisation du germe de courbe défini par $x_0^p - x_1^q = 0$ en O (avec p et q premiers entre eux) est obtenu de la manière suivante : on marque sur une droite affine réelle d'origine Ω les points d'abscisse a_k , qu'on numérote $\#k$, pour $1 \leq \ell \leq k$, on garde le plus petit segment qui contient tous ces points et au point $\#\ell$ on attache une flèche.

Exemples 3.5.7

1 $\frac{p}{q} = \frac{3}{2} : a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = \frac{3}{2}$



2 $\frac{p}{q} = \frac{7}{5} : a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{4}{3}, a_5 = \frac{7}{5}$



Preuve (Suivre les étapes sur les figures données en fin de preuve)

Remarque 3.5.8 Si $a \geq 2$ et $b \geq 2$, alors la courbe d'équation $u^a - v^b = 0$ n'est pas lisse, et admet une singularité à l'origine.

Au début, la courbe est tangente à l'axe $x_1 = 0$ (voir "étape 0"). Dans la suite on prendra toujours la représentation III pour indiquer que la transformée stricte de la courbe est tangente au \mathbb{P}^1 désigné, ceci même si cette transformée stricte est encore singulière. On considère le développement en fraction continue de p/q . On a

$$\begin{aligned} p &= q_1q + r_1 & r_1 < q \\ q &= q_2r_1 + r_2 & r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_3r_2 + r_3 \\ &\dots \\ r_{s-2} &= q_s r_{s-1} + 1 \end{aligned}$$

Étape 1 :

"À gauche" : $x_0 = v, x_1 = uv$, d'où $v^q(v^{p-q} - u^q) = 0$, la transformée stricte est orthogonale au \mathbb{P}^1 numéroté $\#1$ (voir figure). À droite, $x_0 = uv, x_1 = v$, d'où $v^q(u^p v^{p-q} - 1) = 0$, et il n'y a plus de singularité. Désormais on ne travaille que du côté où il se passe quelque chose.

Étape 2 :

On fait $v = v, u = uv$, d'où $v^{2q}(v^{p-2q} - u^q)$, la transformée stricte est orthogonale au \mathbb{P}^1 numéroté $\#2$.

Étape 3 :

On fait $v = v, u = uv$, d'où $v^{3q}(v^{p-3q} - u^q)$, la transformée stricte est orthogonale au \mathbb{P}^1 numéroté $\#3$.

Étape q_1 :

On arrive à $v^{q_1q}(v^{r_1} - u^q)$ (depuis l'étape 1 on fait toujours $v = v, u = uv$), la transformée stricte est tangente au \mathbb{P}^1 numéroté $\#q_1$. On a $r_1 < q$.

Étape $q_1 + 1$:

On "change de côté" : $u = v, v = uv$ d'où $u^{q_1q} v^{q_1q_1 + r_1} (u^{r_1} - v^{q-r_1})$, la transformée stricte est orthogonale au \mathbb{P}^1 numéroté $\#(q_1 + 1)$. Ici la droite $\{u = 0\}$ se projette sur la droite $\#q_1$ par π_2 . Donc, la transformée stricte est tangente au \mathbb{P}^1 numéroté $\#q_1$, et ce \mathbb{P}^1 noté $\#q_1$ va resté tangent à la transformée stricte jusqu'à l'étape $q_1 + q_2$.

Étape $q_1 + 2$:

On fait : $v = v, u = uv$ d'où $u^{q_1q} v^{2q_1q_1 + 2r_1} (u^{r_1} - v^{q-2r_1})$, la transformée stricte est tangente au \mathbb{P}^1 numéroté $\#q_1$, et orthogonale au \mathbb{P}^1 numéroté $\#(q_1 + 2)$, qui coupe le \mathbb{P}^1 numéro $\#(q_1 + 1)$.

Étape $q_1 + 3$:

On travaille toujours du même côté et on obtient le résultat illustré par la figure. La transformée stricte est toujours tangente au \mathbb{P}^1 numéroté $\#q_1$. Ceci continue jusqu'à l'étape $q_1 + q_2$.

Étape $(q_1 + q_2)$:

La transformée stricte a pour équation $u^{r_1} - v^{r_2} = 0$, en faisant $u = uv, v = v$; la composante $\#(q_1 + q_2)$ est donc tangente à cette transformée stricte, et la composante $\#q_1$ est, elle, transverse à l'origine à la transformée stricte.

Étape $(q_1 + q_2 + 1)$:

On fait $u = v, v = uv$. La transformée stricte a pour équation $v^{r_1-r_2} - u^{r_2} = 0$; la composante $\#(q_1 + q_2)$ est donc tangente à cette transformée stricte, et la composante $\#(q_1 + q_2 + 1)$ est transverse à l'origine à la transformée stricte.

Pour la suite suivre sur les dernières figures ($s = 2$).

Que se passe-t-il "à la fin"? Au bout de $(q_1 + \dots + q_s)$ étapes, on arrive à une transformée stricte dont l'équation est $v - u^{r_s-1} = 0$, qui est tangente à la composante $\#(q_1 + \dots + q_s)$ du diviseur exceptionnel et transverse à la composante $\#(q_1 + \dots + q_{s-1})$ Voici la suite les étapes suivantes :

Étape $(q_1 + \cdots + q_s + 1)$:

On a $u = v, v = uv$, d'où la transformée stricte d'équation $-v^{r_s-1} + u = 0$. On obtient donc une nouvelle composante du diviseur exceptionnel qui est orthogonale à cette transformée stricte, la composante numéro $\sharp(q_1 + \cdots + q_s)$ restant tangente à cette transformée stricte.

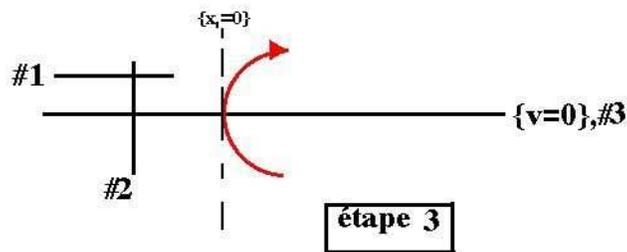
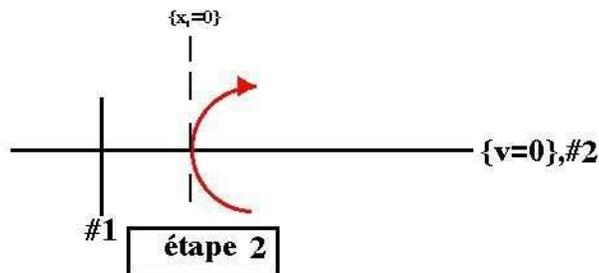
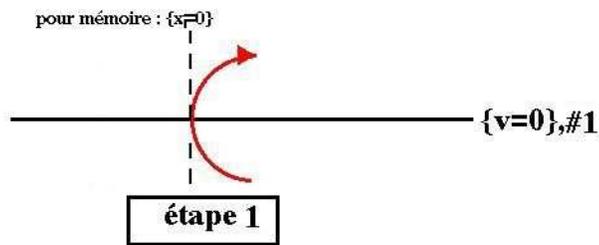
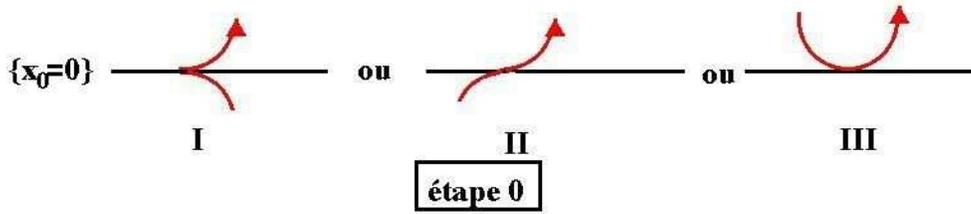
Étape $(q_1 + \cdots + q_{s+1} - 1)$:

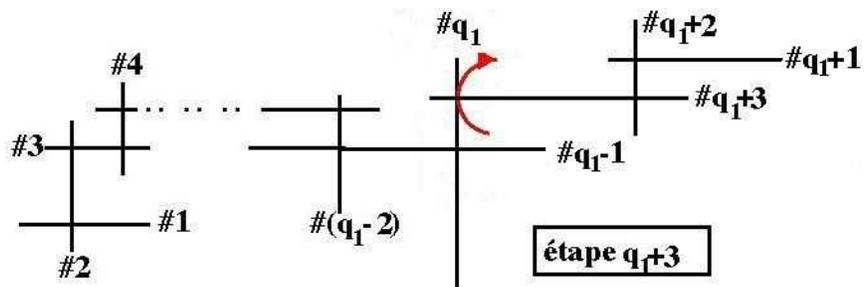
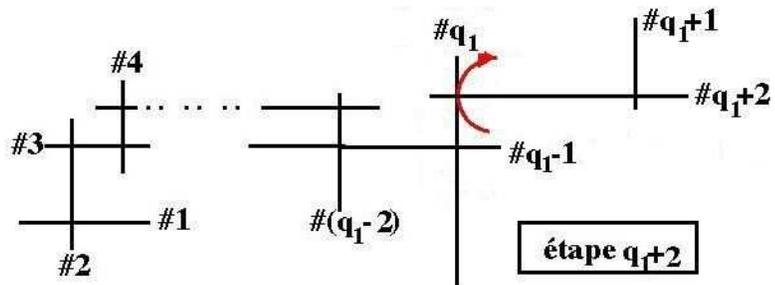
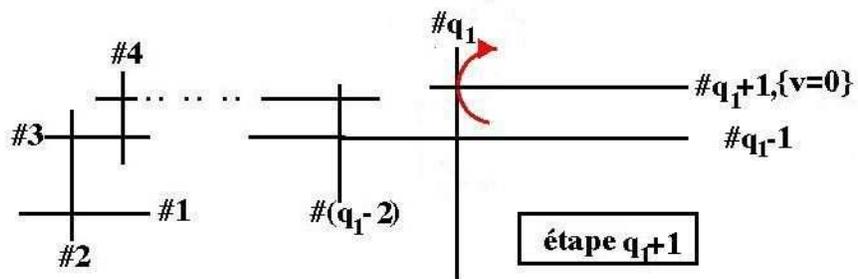
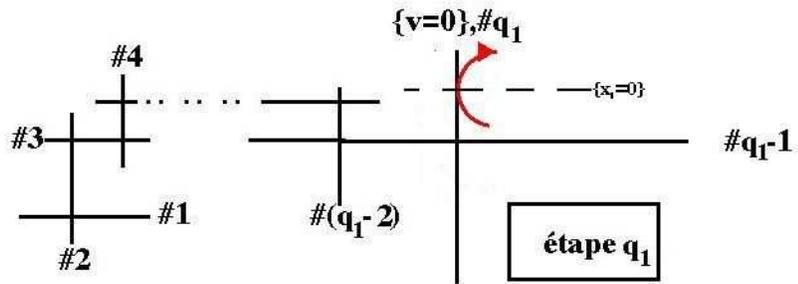
C'est l'avant-dernière étape. On fait $u = uv, v = v$ en partant de la transformée stricte précédente d'équation $u - v^2 = 0$, qui était tangente à $\sharp(q_1 + \cdots + q_s)$ et transverse à $\sharp(q_1 + \cdots + q_{s+1} - 2)$. On obtient la transformée stricte d'équation $u - v = 0$ (donc une droite); cette droite et les composantes du diviseur exceptionnel $\sharp(q_1 + \cdots + q_s)$ et $\sharp(q_1 + \cdots + q_{s+1} - 1)$ sont concourantes à l'origine.

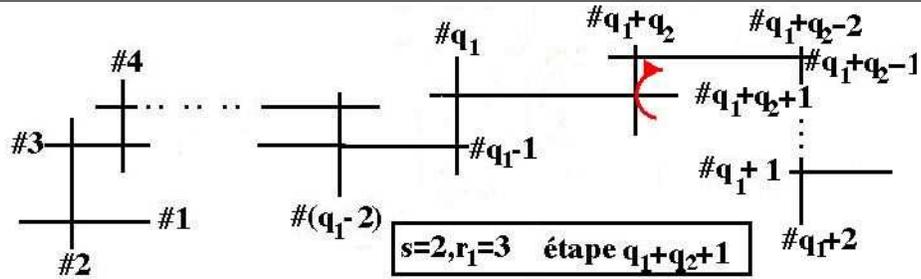
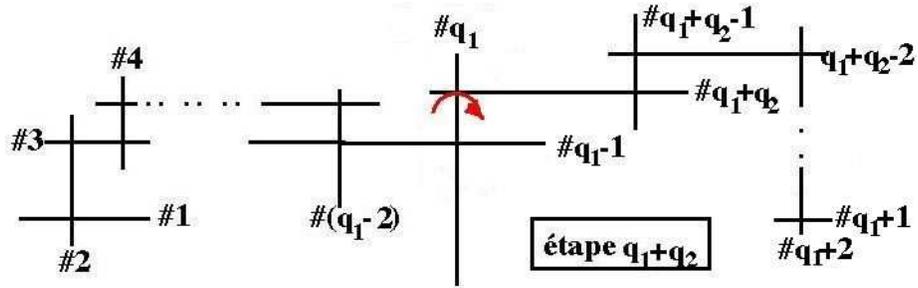
Dernière étape :

Tout se sépare : la composante $\sharp(q_1 + \cdots + q_s + q_{s+1})$ intersecte transversalement les composantes $\sharp(q_1 + \cdots + q_s)$ et $\sharp(q_1 + \cdots + q_s + q_{s+1} - 1)$ ainsi que la transformée stricte.

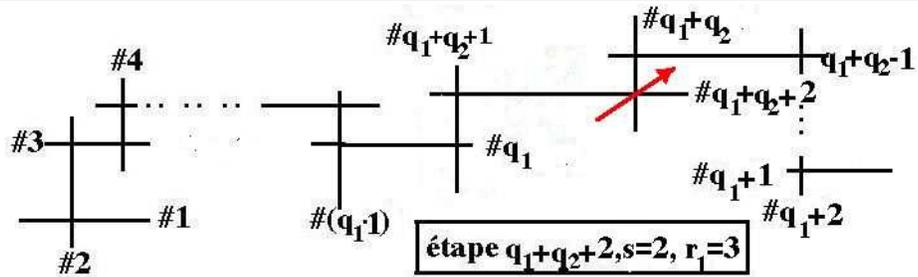
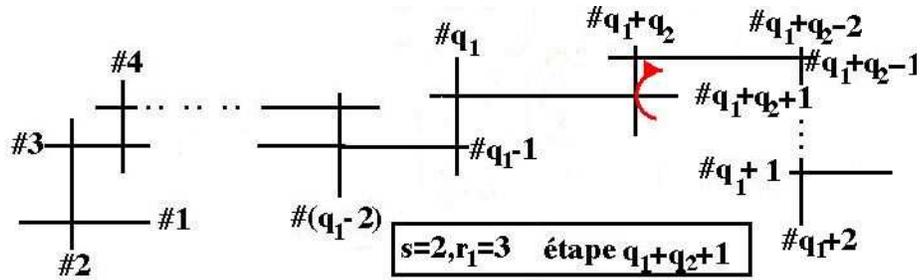
En suivant pas à pas ces étapes, on voit que l'arbre de désingularisation est bien celui qui est annoncé.

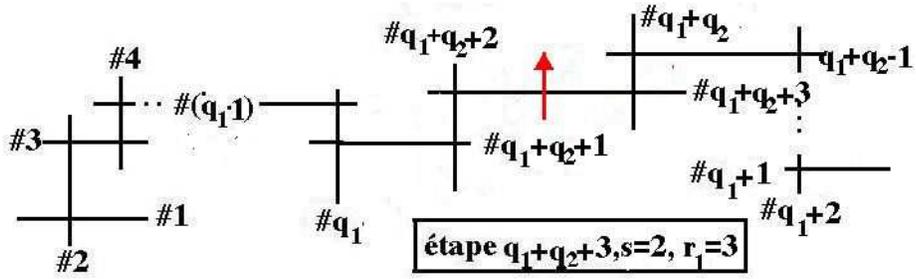




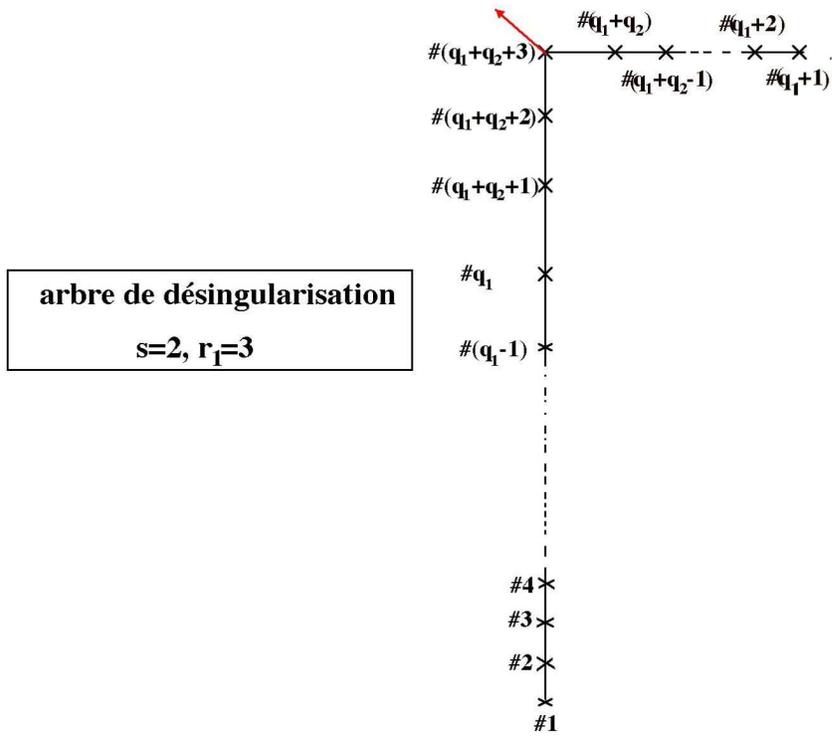


Dans la suite, on fait $s = 2$ et $r_1 = 3$, et on illustre la fin de la désingularisation.



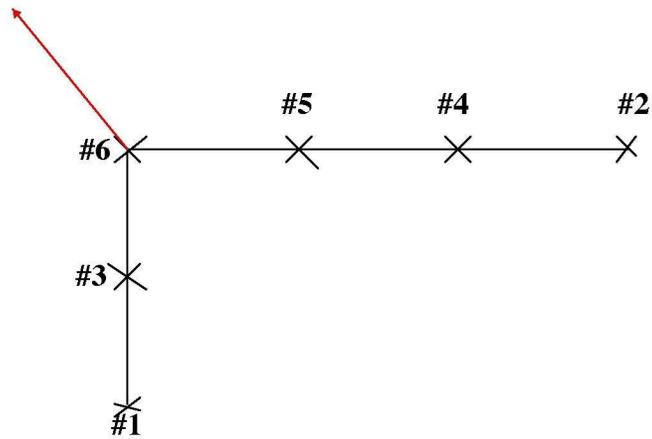


On termine par l'arbre de désingularisation ci-dessous.



■

Pour comprendre ce qui se passe concernant les multiplicités des composantes du diviseurs exceptionnel, traitons un dernier exemple : $x_1^{11} - x_1^7 = 0$. La décomposition de $11/7$ en fraction continue implique que l'arbre de désingularisation (non pondéré) est le suivant.

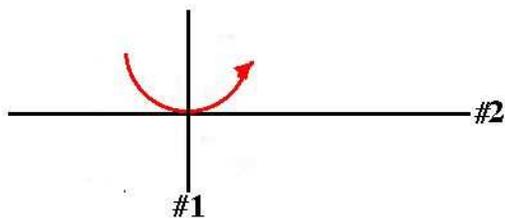


Effectuons explicitement les éclatements successifs, pour comprendre ce qui donnera l'algorithme de calcul des multiplicités.

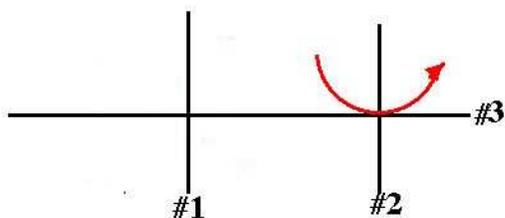
1. $x_0 = v, x_1 = uv : v^7(v^4 - u^7).$



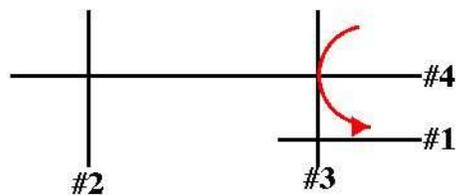
2. $u = v, v = uv; u^7 v^{11}(u^4 - v^3).$



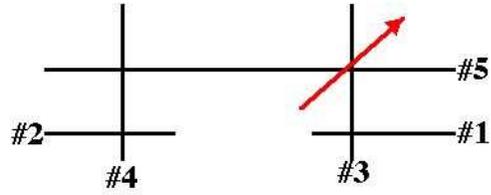
3. $u = v, v = uv; u^{11} v^{21}(v - u^3).$



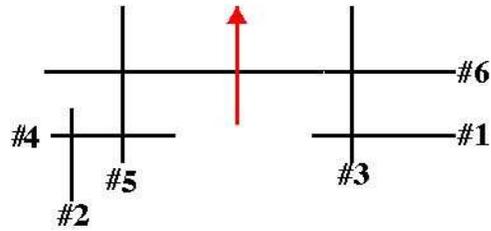
4. $u = v, v = uv; u^{21} v^{33}(u - v^2).$



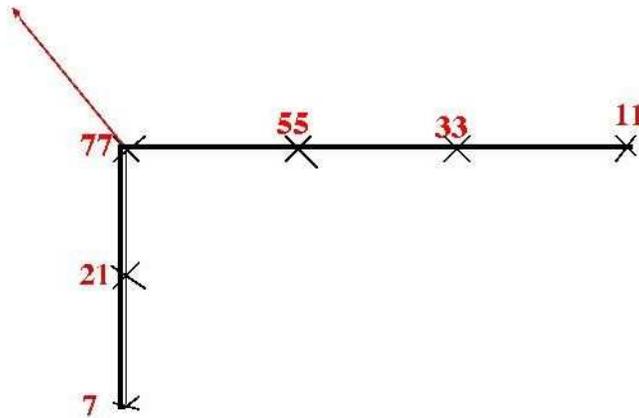
5. $v = v, u = uv; u^{21} v^{55}(u - v).$



6. $v = v, u = uv; u^{21}v^{77}(u - 1).$



D'où l'arbre de désingularisation pondéré.



Si on regarde les résultats donnés par MAGMA : la commande MAGMA est

```
clear ;
k := RationalField() ;
kXY<X,Y> := PolynomialRing(k, 2) ; A2 := AffineSpace(kXY) ;

SetEchoInput(true) ;
C := Curve(A2, X^11 - Y^7) ;
G := ResolutionGraph(C, Origin(A2)) ;
G ;
```

Résultat :

```
> C := Curve(A2, X^11 - Y^7) ;
> G := ResolutionGraph(C, Origin(A2)) ;
> G ;
The resolution graph on the Digraph
Vertex Neighbours
1 ([ -3, 11, 2, 0 ]) 2 ;
2 ([ -2, 33, 7, 0 ]) 3 ;
3 ([ -2, 55, 12, 0 ]) 4 ;
4 ([ -1, 77, 17, 1 ]) 5 ;
5 ([ -4, 21, 4, 0 ]) 6 ;
6 ([ -3, 7, 1, 0 ]) ;
```

3.6 Arbre de désingularisation d'une branche irréductible donnée par son développement de Puiseux

Dans tout ce paragraphe, on considère un germe de courbe irréductible à singularité isolée en O .

3.6.1 Suite des multiplicités

Après un nombre fini d'éclatements de points, on obtient une transformée stricte qui est sans singularité. Si on désigne par ν_i la suite des multiplicités des « singularités » des points au dessus de O sur les transformées strictes, cette suite stationne au rang N avec des 1. On tronque cette suite pour obtenir $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{N-1})$, qui est la suite des multiplicités de la branche irréductible considérée.

3.6.2 Suite des multiplicités et développement de Puiseux

Connaissant le développement de Puiseux $y = \sum_{h \in \mathbb{Q}, h \geq 1} b_h x^h$, si m est le plus grand dénominateur dans ce développement, on déduit l'écriture paramétrique suivante

$$\begin{cases} x &= t^m \\ y &= a_1 t^{k_1} + a_2 t^{k_2} + \dots, a_i \neq 0, k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Comme on va itérer un processus sur les éclatements successifs, on ne suppose pas que $k_1 > m$. Avec ce point de vue, quatre cas peuvent se présenter.

1. $k_1 \neq 0, m \leq k_1$, alors $\nu_0 = m$;
2. $k_1 \neq 0, m > k_1$, alors $\nu_0 = k_1$;
3. $k_1 = 0, m \leq k_2$, alors $\nu_0 = m$;
4. $k_1 = 0, m > k_2$, alors $\nu_0 = k_2$.

Pour comprendre les deux derniers cas, remarquons que lorsque $k_1 = 0$, cela veut dire que la courbe ne passe pas par l'origine et on procède alors à un changement de variables

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y - a_1 \end{cases}$$

et une fois cela fait, k_2 joue le rôle dévolu à k_1 dans les deux premiers cas. On procède alors à l'éclatement de la courbe au point singulier.

Cas 1 La transformation est la suivante.

$$\begin{cases} x &= v \\ y &= uv \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} u &= a_1 t^{k_1 - m} + a_2 t^{k_2 - m} + \dots \\ v &= t^m \end{cases}$$

Cas 2 La transformation est la suivante.

$$\begin{cases} x &= uv \\ y &= v \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} u &= b_1 t^{k_1 - m} + b_2 t^{k_2 + m - 2k_1} + \dots \\ v &= a_1 t^{k_1} + a_2 t^{k_2} + \dots \end{cases}$$

Cas 3 La transformation est la suivante.

$$\begin{cases} x = v \\ y - a_1 = uv \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} u = a_2 t^{k_2 - m} + a_3 t^{k_3 - m} + \dots \\ v = t^m \end{cases}$$

Cas 4 La transformation est la suivante.

$$\begin{cases} x = uv \\ y - a_1 = v \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} u = b_1 t^{m - k_2} + \dots \\ v = a_2 t^{k_2} + a_3 t^{k_3} + \dots \end{cases}$$

On peut appliquer dans ces quatre cas le résultat précédent (il y a quatre cas dans chacun des quatre cas etc.). Cette construction donne un algorithme qui permet de calculer la suite des multiplicités de cette branche irréductible.

On peut préciser les choses dans le déroulement de cet algorithme. Supposons qu'au départ on se trouve dans le cas 1. Alors $\nu_0 = m$. Si à la deuxième étape, on se trouve à nouveau dans le cas 1, alors $\nu_1 = m$ et $2m \leq k_1$. Plus généralement, si $m < k_1$, la division euclidienne de k_1 par m s'écrit $k_1 = \mu m + r$, avec $0 \leq r < m$, et on a $m = \nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_{\mu-1}$. Si $r > 0$ alors $\nu_\mu = r$, et à l'étape suivante m prend la place de k_1 et r celle de m . Ce qui conduit à effectuer la division euclidienne de m par r : $m = \mu' r + r'$, et cela permet de donner les μ' multiplicités suivantes. On a $\nu_\mu = \dots = \nu_{\mu+\mu'-1} = r$. Comme on le voit, on est en train de réaliser l'algorithme d'Euclide de recherche du pgcd de m et k_1 . On écrit $r' = \mu''' r'' + r''''$, ce qui donne μ''' fois la multiplicité r'' . En dernier on obtient $r^{(k-1)} = \mu^{(k+1)} r^{(k)}$, ce qui est le cas qu'on a laissé de côté où le reste est nul dans la division euclidienne.

Si au début on se trouve dans le cas $k_1 < m$, alors $\mu_0 = 0$ et $r = k_1$, puis tout se passe comme dans le cas 1. Reste à comprendre ce qui se passe lorsqu'on se retrouve à la fin de l'algorithme d'Euclide, c'est-à-dire lorsque le reste est nul. Alors en fait on est dans l'un des cas 3 ou 4. C'est-à-dire que on a

$$\begin{cases} u = t^{r^{(k)}} + \text{termes de degré supérieur} \\ v = c \cdot t^{k_2 - k_1} + \text{termes de degré supérieur} \end{cases}$$

On itère l'algorithme d'Euclide pour le couple $(k_2 - k_1, r^{(k)})$.

Conclusion. La suite des multiplicités est obtenue à partir du développement de Puiseux en effectuant l'algorithme d'Euclide en commençant par $k_i - k_{i-1}$ entre deux exposants successifs et la dernière multiplicité calculée dans l'étape précédente.

En fait, seuls les exposants caractéristiques (ceux qu'on trouve dans la partie caractéristique du développement de Puiseux) interviennent. En effet, si k_1 n'est pas un exposant caractéristique, alors k_1 est un multiple de m , et les μ premiers éléments de la suite des multiplicités sont égaux à m . Puis, on écrit $k_2 - k_1 = \mu' m + r'$ pour en déduire que les $\mu + \mu'$ premiers éléments de la suite des multiplicités sont égaux à m . Or, $k_2 > k_1$, donc $k_2 > \mu m$. L'« oubli » du terme $a_{k_1} t^{k_1}$ conduit au même résultat : on écrit $k_2 = (\mu + \mu') m + r'$. On faisant le même raisonnement avec tous les exposants non caractéristiques, on voit que seuls les exposants caractéristiques jouent vraiment un rôle dans cet algorithme. D'où le théorème 3.6.1 suivant.

Théorème 3.6.1 (Enriques-Chisini) *Pour une courbe irréductible dont la partie caractéristique du développement de Puiseux s'écrit*

$$\begin{cases} x = t^m \\ y = a_1 t^{k_1} + \dots + a_g t^{k_g} \end{cases}$$

la suite des multiplicités s'obtient à partir de la suite des g algorithmes d'Euclide suivants.

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \mu_{i,1}r_{i,1} + r_{i,2} \\ r_{i,1} &= \mu_{i,2}r_{i,2} + r_{i,3} \\ &\vdots \\ r_{i,w(i)-1} &= \mu_{i,w(i)}r_{i,w(i)} \end{aligned} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq g$$

où $1 \leq r_{i,j+1} < r_{i,j}$, $\kappa_i = k_i - k_{i-1}$ ($k_0 = 0$), pour $1 \leq i \leq g$, et $r_{i,1} = r_{i-1,w(i-1)}$ pour $i > 1$ et $r_{1,1} = m$. Avec ces notations la multiplicité $r_{i,j}$ apparaît $\mu_{i,j}$ fois, éventuellement plus si le même $r_{i,j}$ est présent lors de l'exécution d'algorithmes d'Euclide successifs.

Réciproquement, on obtient, à partir de la suite des multiplicités, la partie caractéristique du développement de Puiseux de la courbe en utilisant la chaîne des algorithmes d'Euclide ci-dessus.

3.6.3 Développement de Puiseux et arbre de désingularisation

3.7 Arbre de désingularisation d'une courbe réductible à deux branches

L'arbre de désingularisation d'une courbe à deux branches est déterminées par la suite des paires caractéristiques de chaque branche et par l'exposant de coïncidence entre ces deux branches.

Définition 3.7.1 On dit que la fraction m/n est un exposant permis pour un développement de Puiseux φ si les séries de Puiseux $\varphi(x)$ et $\varphi(x) + \lambda x^{m/n}$ ont mêmes paires caractéristiques pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$, où S est un sous-ensemble fini de \mathbb{C} .

Exemple 3.7.2 Si $\varphi(x) = x^{3/2} + x^{9/4}$ les exposants permis sont : $1, 3/2, 4/2, 9/4, 10/4, 11/4, \dots$

Remarque 3.7.3 Lorsque m/n est l'exposant de coïncidence entre deux branches, m/n est un exposant permis pour l'une ou l'autre, voire les deux, branches en question.

3.7.1 Cas où l'exposant de coïncidence est un exposant permis pour les deux branches

Dans ce cas, les deux branches ont mêmes paires de Zariski jusqu'au rang, disons, $i-1 : \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$. Ce qui permet d'écrire l'exposant de coïncidence :

$$\frac{m}{n} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{p_{i-1}}{q_1 \dots q_{i-1}} + \frac{\bar{p}}{q_1 \dots q_{i-1}}$$

- ◇ $\bar{p} = 0$: dans ce cas on obtient l'arbre de désingularisation de $f.g$ en confondant l'arbre de f (dont le développement de Puiseux est φ) et celui de g (dont le développement de Puiseux est ψ) jusqu'au sommet numéroté u vérifiant
- ◇ $\bar{p} > 0$ et $i-1 = g = g'$: dans ce cas les parties caractéristiques des deux branches sont égales, il y a une infinité d'exposants de coïncidence possibles.
- ◇ $\bar{p} > 0$ et $i-1 < g$: deux cas se présentent.
 - $i-1 = g'$
 - $i-1 < g'$

Bibliographie

- [1] E. BRIESKORN, H. KNÖRRER, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser, 1986.
- [2] J.L. COOLIDGE, *A treatise on algebraic plane curves*, Dover Publications, 1959.
- [3] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA, *Ideals, varieties, and algorithms*, UTM, Springer, 1996.
- [4] W. FULTON, *Algebraic curves*, Mathematics Lecture Notes Series, W.A. Benjamin, 1969.
- [5] I.M. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKY, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, 1994.
- [6] F. KIRWAN, *Complex algebraic curves*, Student texts 23, LMS, Cambridge University Press, 1992.
- [7] H. MATSUMARA, *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge University Press, 1986.
- [8] J. SILVERMAN, J. TATE, *Rational points on elliptic curves*, UTM, Springer.
- [9] A. SZPIRGLAS, *Mathématiques L3 Algèbre*, cursus LMD, Pearson Education, 2009.
- [10] R.J. WALKER, *Algebraic curves*, Springer, 1949.